

### Primer Examen Parcial del curso Cálculo Multivariable.

**Prof. Darwin Gutiérrez**

Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos y realizando los gráficos necesarios en cada ejercicio, tiene exactamente 1.5 hrs cada ejercicio vale **10/7 puntos**.

Nombre:

1. Sean  $\vec{a} = (4, 5, -2)$ ,  $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$  y  $\vec{c} = (-3, -1, -2)$  vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Calcular:

a)  $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \vec{a}$

b)  $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$

c)  $2\text{Proy}_{\vec{a}}(\vec{b}) \times 2\text{Proy}_{\vec{b}}(\vec{a})$

2. Considere una pecera que tiene vértices en el origen,  $\vec{u} = 5\hat{i} + 10\hat{j}$ ,  $\vec{v} = 5\hat{i} - 10\hat{j}$ ,  $\vec{w} = 20\hat{k}$ ,  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} + \vec{w}$ ,  $\vec{v} + \vec{w}$  y  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ . Dibuje dicha pecera y calcule su área, su volumen y el ángulo entre sus aristas que salen del origen.
3. Demuestre que los vectores  $(\vec{u} \times \vec{v})$  y  $(5\vec{v} \times -6\vec{u})$  son siempre paralelos y los vectores  $(\vec{u} \times \vec{v})$  y  $5\vec{v}$  son siempre perpendiculares para cualquier par de vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .
4. Considere la recta  $L_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-2}{5}$  encuentre una recta  $L_2$  que se intersecte a  $L_1$  en un solo punto y estas sean perpendiculares entre sí.
5. Considere el plano  $P_1$  que contiene a los vectores  $(1, 3, -2)$ ,  $(2, 4, 5)$ ,  $(2, 2, -5)$ . Y sea  $P_2$  el plano que pasa por el  $(3, 2, -1)$  y paralelo al plano  $x - y + z = 6$ . Hallar  $P_1 \cap P_2$
6. Considere la recta  $L$  que pasa por el punto  $(5, 1, 5)$  y perpendicular al plano  $yz$ , y considere el plano con intersección en los ejes dadas por  $2\hat{i}, 3\hat{j}, 4\hat{k}$ . Hallar  $P \cap L$ .
7. Dibuje y encuentre la ecuación de la esfera que está centrada en  $(8, 7, 9)$  y es tangente al plano  $x + y + z = 2$ .

## Segundo Examen Parcial del curso Análisis Vectorial.

Profr. Darwin Gutiérrez

Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos, cada ejercicio vale 1.5 puntos.

Nombre:

Grupo:

1. Considere la curva  $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ 
  - Haga un bosquejo de la imagen de la curva
  - Encuentre un plano que no intersecte a la curva
  - Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto  $\vec{\gamma}(\pi/4)$ , y grafíquela.
2. Sean  $\vec{f}(t)$  y  $\vec{g}(t)$  2 curvas, demuestre que:

$$(\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'.$$

Apliqué el resultado para calcular  $[(t, \frac{1}{t}, t^2) \times (t-3, \frac{1}{t-5}, (t-1)^2)]'$

3. Sean  $f(x, y) = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$  y  $g(x, y) = \ln(y - x - 2)$  Dibujar el dominio de cada una y encuentre 3 curvas de nivel de cada una y graficarlas.
4. Encuentre la linealización de las siguientes funciones en los puntos dados:
  - $z = 4x^2y - 2x^3y - 2xy$  en  $(2, 2)$  y aproxime en  $(2.001, 2.001)$
  - $w = \sin(xyz)$  en  $(1, 2, \pi)$  y aproxime en  $(1.001, 2.001, 3, 1416)$

Además encuentre la derivada direccional en los puntos dados en la dirección  $(1, 1)$  y  $(1, 1, 1)$  respectivamente.

5. Sea  $\phi(x, y) = \frac{5xy}{2x^2 + 2y^2}$ 
  - Calcular el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$
  - Calcular la magnitud de su gradiente
  - Calcular  $\partial_{xy}\phi$
6. Considere la superficie  $xy + z = 8$ . Determinar todos los puntos sobre ella que sean mas cercanos al origen.
7. Se va a construir una caja rectangular cerrada de tal modo que su volumen sea de  $6m^3$ . El costo del material para la parte superior y el fondo son de 10pesos por  $m^2$  y 20pesos por  $m^2$  respectivamente. El costo de los lados es de 5pesos por  $m^2$  Determine la función de costo  $c(x, y)$  donde  $x, y$  son la longitud y ancho de la caja respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirían un costo mínimo.
8. En negocios un índice de utilidad  $U$  es una función que depende de la venta de las unidades de 2 artículos diferentes digamos  $x, y$  respectivamente (dependientes entre si). Si  $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$  encuentre sus extremos sujetos a la relación lineal, cuando vendemos 18 unidades del primer producto no vendemos nada del segundo producto y cuando vendemos 3 unidades del segundo producto no vendemos nada del primero.

### Tercer Examen Parcial del curso de Cálculo Multivariable.

**Prof. Darwin Gutiérrez**

Instrucciones: Resuelva correctamente los siguientes ejercicios justificando todos sus procedimientos y realizando los gráficos necesarios en cada ejercicios vale **2 puntos**.

Nombre:

1. Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones  $y = 8 - x^2$  y  $y = 2x^2$ . Además calcule  $\int \int_R (x + y) dA$  donde  $R$  es la región anterior.
2. Calcule el volumen de una sección del cilindro  $C = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 10 - 2y^2\}$  que se encuentra en el primer octante y que se corta por el plano  $x = 5$ . Calcular también  $\int \int \int_V z dV$  con  $V$  el volumen que encierra la sección del cilindro anterior.
3. Calcular  $\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para:
  - $\vec{F} = (2x^2, -y)$  y la curva  $r$  es el segmento de línea recta que une al  $(-3, -2)$  al  $(3, 2)$
  - $\vec{C} = (y, -z, -x)$  y la curva  $r$  es el segmento de línea recta que une al  $(-3, -2, -1)$  al  $(3, 2, 1)$
4. Calcular las siguientes integrales de línea en el plano cerradas  $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$ :
  - $\vec{F} = (-y, 2x)$  y la curva  $r$  cerrada es el perímetro de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$
  - $\vec{F} = (y^2, -x)$  y la curva  $r$  es el triángulo con vértices el origen el  $4\hat{i}$  y  $2\hat{j}$ .
5. Calcular la integral de superficie  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , cuya función de densidad es  $f(x, y, z) = xy - 2z$ 
  - $S$  es la superficie parametrizada por  $\vec{r}(u, v) = (u - v, u + v, 4)$  definida en el rectángulo  $[-2, 4] \times [-3, 2]$
6. Calcular  $\oint_r \vec{F} \cdot d\vec{r}$  donde  $r$  es el contorno de una disco que vive en el plano  $x + y + z = 6$  de radio 10 centrado en  $(2, 2, 2)$  y  $\vec{F}(x, y, z) = (-3y, 2x, 5z)$ .



Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Cómputo  
Primer examen de cálculo multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

**Instrucciones.** Lea cuidadosamente cada ejercicio y resuelva correctamente, justificando todas sus respuestas.

- Sean  $\vec{v} = (-2, 5)$  y  $\vec{w} = (3, -2)$ .
  - Calcule  $5\vec{w} - 3\vec{v}$  y  $5\vec{v} - 3\vec{w}$ .
  - Encuentre la longitud de  $\vec{v} + \vec{w}$ .
  - Expresa  $\hat{i}$  como una combinación lineal  $r\vec{v} + s\vec{w}$ .
  - Encuentre un escalar  $\alpha$  tal que  $\|\vec{v} + \alpha\vec{w}\| = 6$ .
- Encuentre  $a$  tal que las líneas  $\vec{r}_1 = (1, 2, 1) + t(1, -1, 1)$  y  $\vec{r}_2 = (3, -1, 1) + t(a, 4, -2)$  se intersequen.
- Sean  $\vec{v} = (1, 3, -2)$  y  $\vec{w} = (2, -1, 4)$ 
  - Calcule el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .
  - Encuentre la proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{w}$ .
  - Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  y  $\vec{u} = (1, 2, 6)$ .
  - Todos los vectores ortogonales a  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .
- Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto  $P = (4, -1, 9)$  y que contiene a la recta  $\vec{r}(t) = (1, 4, -3) + t(2, 1, 1)$ .
- Encuentre la intersección de los planos  $x + y + z = 1$  y  $3x - 2y + z = 5$ .
- Determine el tipo de superficie cuadrática:
  - $x^2 + 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 4z = 0$
  - $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 12z = 0$
  - $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
- Escriba la superficie  $x^2 + y^2 - z^2 = 2(x + y)$  como una ecuación en coordenadas cilíndricas de la forma  $r = f(\theta, z)$ .



Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Cómputo  
Segundo examen de cálculo multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**Instrucciones.** Lea cuidadosamente cada ejercicio y resuelva correctamente, justificando todas sus respuestas.

1. Sean  $\vec{r}_1(t) = (t^2, 1, 2t)$ ,  $\vec{r}_2(t) = (1, 2, e^t)$ . Calcule  $\frac{d}{dt}[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)] \Big|_{t=1}$  de dos formas:

- a) Calcule  $\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)$  y luego derive.
- b) Use la regla del producto.

2. Determine si los siguientes límites existen

- a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
- b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

3. Encuentre los puntos sobre la gráfica de  $z = 3x^2 - 4y^2$  en los cuales el vector  $\vec{n} = (3, 2, 2)$  es normal al plano tangente.

4. Sean  $f(x, y, z) = \sin(xy + z)$  y  $P = (0, -1, \pi)$ . Calcule  $D_{\vec{u}}f(P)$ , donde  $\vec{u}$  es un vector unitario que hace un ángulo  $\theta = 30^\circ$  con  $\nabla f_P$ .

5. Sean  $x = s + t$  y  $y = s - t$ . Demuestre que para cualquier función diferenciable  $f(x, y)$ ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}$$

6. Encuentre los puntos críticos de la función  $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$  y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.



Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Cómputo  
Tercer examen de cálculo multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

**Instrucciones.** Lea cuidadosamente cada ejercicio y resuelva correctamente, justificando todas sus respuestas.

1. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción dada.

a)  $f(x, y) = (x^2 + 1)y, \quad x^2 + y^2 = 5$

b)  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2, \quad xy = 4$

2. Sea  $f(x, y) = mxy^2$ , con  $m$  una constante. Encuentre el valor de  $m$  tal que  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) \, dA = 1$ , donde  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$ .

3. Calcule la integral doble de  $f(x, y)$  sobre el dominio  $\mathcal{D}$  indicado

a)  $f(x, y) = x^2y; \quad 1 \leq x \leq 3, \quad x \leq y \leq 2x + 1$

b)  $f(x, y) = 2xy; \quad \text{acotado por } x = y, \quad x = y^2$

4. Dibuje el dominio  $\mathcal{D}$  correspondiente a

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{4x^2 + 5y} \, dx \, dy$$

Después, cambie el orden de integración y evalúe.

5. Evalúe la integral  $\iiint_{\mathcal{W}} f(x, y, z) \, dV$  para la función  $f(x, y, z) = x + y$  en la región  $\mathcal{W}$  dada por  $y \leq z \leq x, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1$ .

6. Sea  $\mathcal{D} = G(\mathcal{R})$ , donde  $G(u, v) = (u^2, u + v)$  y  $\mathcal{R} = [1, 2] \times [0, 6]$ . Calcule  $\iint_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$ .

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCOM  
ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS  
EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CALCULO MULTIVARIABLE  
CICLO 2024-2025/ I TIPO Grupo 2AMI

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez

Nombre: \_\_\_\_\_

Resuelve los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escribe tus problemas con TINTA Encierra en un recuadro tus resultados

No se permite consulta alguna. Duración 90 min.

1. Dadas las magnitudes de los siguientes vectores  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 2$  y  $\theta = 120^\circ$  el ángulo entre  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , si  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$  y  $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$ , hallar
  - a)  $\|\vec{p}\| = \|\vec{a} + 2\vec{b}\|$  y  $\|\vec{q}\| = \|2\vec{a} - \vec{b}\|$
  - b)  $\vec{p} \cdot \vec{q}$
  - c) y el ángulo entre  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$
2. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por  $(1, -2, 3)$  y que es perpendicular tanto al eje  $x$  como a la recta  $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{5}$
3. Hallar a)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y b)  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , si  $z$  se define implícitamente como una función de  $x$  e  $y$ , dada por  $2x^3z - x^2y^2 + 4z^2 + 2xy - 3 = 0$ .
4. Si  $z = f(x, y)$  y tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y

$$x = r^2 + s^2 \quad y = 2rs$$

Determina  $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$

5. Evaluar  $\iiint_V \sin(x + y + z) dV$ . Donde  $V$  es el sólido limitado por las superficies  $z + y = 10$ ;  $z = 0$ ;  $x = 3$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ . Describa y dibuje el sólido sobre el cual se está integrando.
6. Calcula el volumen limitado por las gráficas de las siguientes superficies  
 $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z + x = 2$ .

RESOLVER 5 PROBLEMAS. VALOR DE C/PORBLEMA 2 PUNTOS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCOM

ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

3er EXAMEN DE CALCULO MULTIVARIABLE

CICLO 2024-2025/ I

TIPO Grupo 2AM1

*Super Fácil*

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez

Nombre: \_\_\_\_\_

Resuelve los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo, si tu letra no se entiende no se podrán evaluar tus problemas. Escribe tus problemas con TINTA Encierra en un recuadro tus resultados

No se permite consulta alguna. Duración 90 min.

1. Calcula el volumen limitado por las superficies dadas por  
 $x^2 + y^2 = 16$ ,  $z = 2 - y$ ,  $z = 0$ .

2. Evaluar  $\iiint_V 6xy dV$ . Donde V es el sólido limitado por el plano  $z = 1 + x + y$  y arriba de la región del plano xy limitado por las curvas  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$

- 3- Comprueba el teorema de Green en el plano

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Con  $P(x,y) = -y$ ,  $Q(x,y) = x$ . C es la curva cerrada formada por  $y = x^2$ ,  $y = 4$ .

4. Evaluar  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$

VALOR DE CADA PROBLEMA 2.5 PUNTOS.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCOM  
ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS  
SEGUNDO EXAMEN DE CALCULO MULTIVARIABLE  
CICLO 2024-2025/ I TIPO FACIL Grupo 2AMI

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez

Nombre: \_\_\_\_\_

Resuelve los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escribe tus problemas con TINTA. Encierra en un recuadro tus resultados.

No se permite consulta alguna. Duración 90 min.

**FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL Y CURVAS EN EL ESPACIO**

- Determine los puntos en que la recta tangente a la curva descrita por la función  $\vec{f}(t) = (3t - t^3)\hat{i} + 3t^2\hat{j} + (3t + t^3)\hat{k}$  es paralela al plano  $3x + y + z = 5$
- Siendo  $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = (6t\hat{j} - 24t^2\hat{j} + 4s\text{ent})$  Hallar  $\vec{A}$  bajo las siguientes condiciones

$$\vec{A}(0) = \langle 2, 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{A}(0)}{dt} = \langle -1, 0, -3 \rangle$$

**FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

- a) Comprobar que la función  $z = xe^y + ye^x$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

- b) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{xy}{x^2+y^2} \right)$  ( Demostrar la existencia o no de dicho limite)

- Si  $u = f(x, y)$ , donde  $x = e^s \cos t$  y  $y = e^s \sin t$ . Demostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]$$

- La ecuación  $\left( P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$  conocida como ecuación de Van Der Waals. Considerar el volumen  $V$  como una función de la temperatura y la presión.

Determine  $\frac{\partial V}{\partial T}$  y  $\frac{\partial V}{\partial P}$

- Encontrar todos los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8$$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCOM

ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

1ER EVALUACIÓN DE CÁLCULO MULTIVARIABLE. CICLO 2024/II (FEB-JUL 20224)

PROGRAMA ACADÉMICO : LICENCIATURA EN CIENCIA DE DATOS

## TIPO SUPERFACIL

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez

Nombre: \_\_\_\_\_

No se permite consulta alguna. Duración 90 min. Resolver 5 problemas únicamente. Valor de cada problema 2 puntos.

- Sean  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  vectores unitarios. Calcular  $(3\hat{a} - 4\hat{b}) \cdot (2\hat{a} + 5\hat{b})$  si  $\|\hat{a} + \hat{b}\| = \sqrt{3}$
- Dados los puntos  $P(2,1,3)$ ,  $Q(1,2,1)$ ,  $R(-1,-2,-2)$  y  $S(1,-4,0)$  Hallar la mínima distancia entre las rectas PQ y RS.
- Determinar la ecuación del plano que es paralelo a la recta

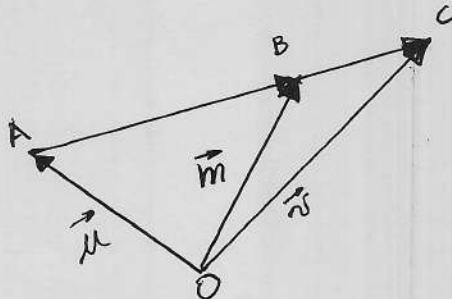
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}$$

Y pasa por la línea de intersección de los planos

$$x - y + z = 0$$

$$y + z - 4 = 0$$

- Encontrar dos vectores unitarios que formen un ángulo de  $60^\circ$  con el vector  $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ . Una vez determinados dichos vectores trace una gráfica de ellos junto con el vector  $\vec{v}$ .
- Utilizando las propiedades del producto punto, demostrar que si  $\theta$  es el ángulo entre dos vectores no nulos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  entonces  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$
- Tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  de  $R^3$  satisfacen las siguientes propiedades;  
 $\|\vec{A}\| = \|\vec{C}\| = 5$ ,  $\|\vec{B}\| = 1$ ,  $\|\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\|$   
Si el ángulo que forman  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es  $\frac{\pi}{8}$ , hallar el ángulo que forman  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ .
- Demostrar que si  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Entonces  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .
- En la figura  $\vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AC}$ . Expresar el vector  $\vec{m}$  en términos de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .





ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Unidad de Aprendizaje Cálculo Multivariable

## PRIMER EXAMEN PARCIAL



NOMBRE:  
FECHA:

GRUPO:

### INDICACIONES

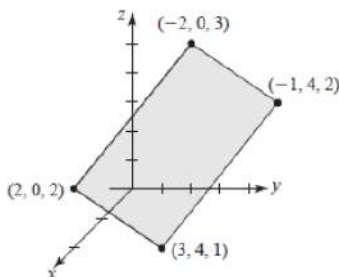
- No se permite el uso de celulares o relojes inteligentes. En caso de ser sorprendido utilizando alguno de estos dispositivos durante el tiempo de aplicación del examen, se **anulará el examen**.
- No se permite hablar durante la aplicación del examen. En caso de tener dudas, preguntar al profesor a cargo. Si el profesor a cargo detecta personas hablando, **podrá anular el examen**.
- No se permite salir del salón bajo ninguna circunstancia durante la aplicación del examen. En caso de emergencia deberán comentarlo al profesor a cargo.

### INSTRUCCIONES:

- Justificar cada paso.
- Graficar en cada ejercicio.

### RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

- Un barco se localiza en el punto  $O$ , inicia su viaje al punto  $M$  recorriendo 15 km en dirección Noroeste, llegando a  $M$  se dirige al punto  $N$  que se encuentra a 35km en dirección Este  $30^\circ$  Norte, ahí cambia de dirección al punto  $L$  que está a 20 km al Sur de  $N$ . Determinar la posición del punto final del recorrido del barco,  $L$ . Obtener el desplazamiento que hizo el barco.
- Los siguientes vectores son las diagonales de un paralelogramo,  $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$  y  $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ . Mostrar que dicho paralelogramo es un rombo. Hallar sus ángulos y la longitud de sus lados. Recuerde que un rombo tiene todos sus lados iguales.
- Determinar el área del siguiente paralelogramo



- Demostrar  $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$ .



ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Unidad de Aprendizaje Cálculo Multivariable

## SEGUNDO EXAMEN PARCIAL



NOMBRE:

GRUPO:

FECHA:

### INDICACIONES

- No se permite el uso de celulares o relojes inteligentes. En caso de ser sorprendido utilizando alguno de estos dispositivos durante el tiempo de aplicación del examen, se **anulará el examen**.
- No se permite hablar durante la aplicación del examen. En caso de tener dudas, preguntar al profesor a cargo. Si el profesor a cargo detecta personas hablando, **podrá anular el examen**.
- No se permite salir del salón bajo ninguna circunstancia durante la aplicación del examen. En caso de emergencia deberán comentarlo al profesor a cargo.

### INSTRUCCIONES:

- Justificar cada paso.

### RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

- (Valor 2.5 puntos)

Obtener la derivada de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$ .

- (Valor 3.5 puntos)

Considere la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Obtener lo siguiente:

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  (usando la definición de derivada parcial).
- $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$  (usando la definición de derivada parcial).
- Si  $g(x, y) = (at, bt)$  con  $a$  y  $b$  constantes. Obtener  $f \circ g$ .



ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Unidad de Aprendizaje Cálculo Multivariable



3. (Valor 1.5 puntos)

Calcular la derivada direccional de  $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$  a lo largo de  $(x_0, y_0) = (0, -1)$  en la dirección de  $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\hat{j}$ .

4. (Valor 2.5 puntos)

Escribir la regla de la cadena para  $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$ . Escribir un ejemplo numérico.

5. (Extra Valor 1.5 puntos)

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^3$  en  $(3, 1, 10)$ . Graficar.



ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Unidad de Aprendizaje Cálculo Multivariable

## TERCER EXAMEN PARCIAL



NOMBRE:

GRUPO:

FECHA:

### INDICACIONES

- No se permite el uso de celulares o relojes inteligentes. En caso de ser sorprendido utilizando alguno de estos dispositivos durante el tiempo de aplicación del examen, se **anulará el examen**.
- No se permite hablar durante la aplicación del examen. En caso de tener dudas, preguntar al profesor a cargo. Si el profesor a cargo detecta personas hablando, **podrá anular el examen**.
- No se permite salir del salón bajo ninguna circunstancia durante la aplicación del examen. En caso de emergencia deberán comentarlo al profesor a cargo.

### INSTRUCCIONES:

- Justificar cada paso.
- Graficar si es necesario.

### RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1. Resolver lo siguiente:

a) (Valor 1.0 punto)

Obtener la divergencia y rotacional de campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = yzLn(x)\hat{i} + (2x - 3yz)\hat{j} + xy^2z^3\hat{k}$ .

b) (Valor 3.0 puntos)

Demostrar  $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{f} + \nabla \cdot \vec{G}$ .

2. (Valor 1.5 puntos)

Encuentre los extremos relativos de la función  $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$ .

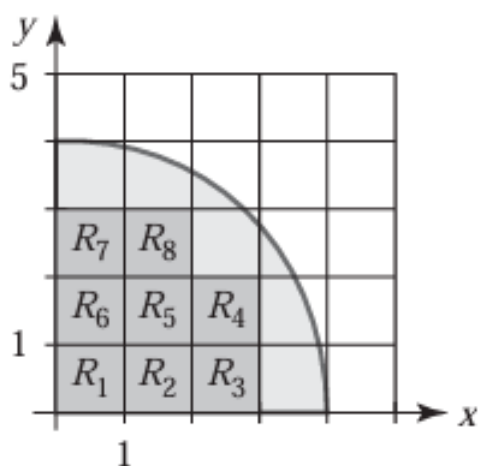
3. (Valor 1.5 puntos)

Utilice los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de  $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$  sujeta a  $x - y = 1$ .



4. (Valor 3.0 puntos)

Considere la región  $R$  en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = 0$  y  $x = 0$ . Aproxime la integral doble  $\iint_R (x + 3y + 1) dA$  usando la suma de Riemman y las  $R_k$  de la figura.



# Examen de Cálculo Multivariable

Tipo A

Nombre \_\_\_\_\_  
Grupo:

## Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet.

1. (15 puntos) Localiza los siguientes vectores en el espacio tridimensional:

$$\mathbf{a} = (2, -1, 3), \quad \mathbf{b} = (-1, 4, 0)$$

y dibuja los vectores posición correspondientes a

(a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

(b)  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

2. (15 puntos) Encuentra el ángulo entre los vectores:

$$\mathbf{a} = (1, 1, -1), \quad \mathbf{b} = (2, 1, -\sqrt{3})$$

¿Son paralelos, ortogonales u oblicuos? ¿Qué puede decir de la dirección de cada uno de ellos?

3. (10 puntos) Calcula la proyección del vector  $\mathbf{a} = (3, 4, -1)$  sobre el vector  $\mathbf{b} = (-1, 6, 1)$ .

4. (10 puntos) Encuentra el área del paralelogramo formado por los puntos:

$$A(1, 0, 0), \quad B(2, 1, 0), \quad C(3, 2, -6), \quad D(2, 1, 1)$$

5. (10 puntos) Determina si los puntos  $P(1, 2, 3)$ ,  $Q(2, 3, 4)$ ,  $R(0, 1, 2)$ , y  $S(3, 4, 5)$  están en el mismo plano.

6. (10 puntos) Encuentra el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

$$\mathbf{a} = (1, -5, 3), \quad \mathbf{b} = (4, 8, -2), \quad \mathbf{c} = (7, 8, 9)$$



7. (30 puntos) Dibuja las curvas en el espacio determinadas por las siguientes funciones vectoriales.

(a)  $\mathbf{r}(t) = (1 + t, 2 - t, 3t)$

(b)  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), \sin(t), 0.5t)$

# Examen de Cálculo Multivariable

## Tipo B

Nombre \_\_\_\_\_  
Grupo:

### Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet.

1. (15 puntos) Localiza los siguientes vectores en el espacio tridimensional:

$$\mathbf{a} = (3, -1, 5), \quad \mathbf{b} = (-2, 4, 1)$$

y dibuja los vectores posición correspondientes a

(a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

(b)  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

2. (15 puntos) Encuentra el ángulo entre los vectores:

$$\mathbf{a} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{b} = (2, 1, \sqrt{3})$$

¿Son paralelos, ortogonales u oblicuos? ¿Qué puede decir de la dirección de cada uno de ellos?

3. (10 puntos) Calcula la proyección del vector  $\mathbf{a} = (-1, 6, 1)$  sobre el vector  $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$ .

4. (10 puntos) Encuentra el área del paralelogramo formado por los puntos:

$$A(2, 0, 0), \quad B(-2, -1, 0), \quad C(2, 1, 1), \quad D(3, 2, -6)$$

5. (10 puntos) Determina si los puntos  $P(1, 2, 3)$ ,  $Q(2, 3, 4)$ ,  $R(0, 1, 2)$ , y  $S(3, 4, 5)$  están en el mismo plano.

6. (10 puntos) Encuentra el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

$$\mathbf{a} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{b} = (0, 3, -1), \quad \mathbf{c} = (2, 1, 2)$$

7. (30 puntos) Dibuja las curvas en el espacio determinadas por las siguientes funciones vectoriales.

(a)  $\mathbf{r}(t) = (1 + t, 2 - t, 3t)$

(b)  $\mathbf{r}(t) = (3 \cos(t), t, 2 \sin(t))$



## Cálculo multivariable, 2o. examen parcial Tipo B

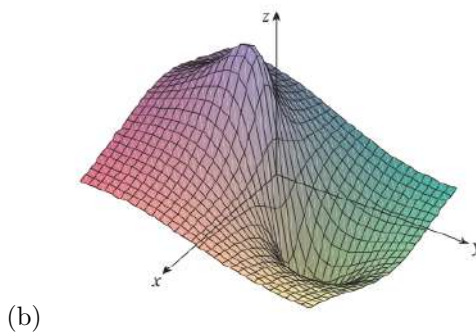
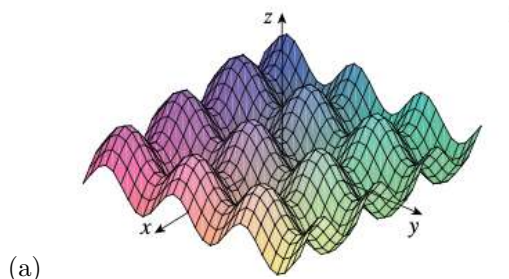


Nombre \_\_\_\_\_  
Grupo: \_\_\_\_\_

### Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet.

1. (20 puntos) Dibuja los mapas de contorno de las siguientes superficies



2. (25 puntos) Sea

$$f(x, y) = \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

- (a) Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

- (b) Argumente si la función es continua en  $(0, 0)$ .  
(c) Especifique el dominio de la función.
3. (20 puntos) Calcula las derivadas parciales de la función

$$f(x, y, z) = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - x^2 e^x y z$$

4. (15 puntos) Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie  $S$  en el punto  $P(-2, 1, -3)$ . No tenemos una ecuación para  $S$  pero sabemos que las curvas

$$r_1(t) = \langle -2 + 3t, 1 - t^2, -3 - 4t + t^2 \rangle$$
$$r_2(u) = \langle 2 - 2u, 2u - 3, 2u^2 - 11 \rangle$$

se encuentran ambas en  $S$ . Encuentre una ecuación del plano tangente en  $P$ .

5. (20 puntos) Estime la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 12 *cm* de altura y 4.2 *cm* de diámetro. Se sabe que el metal para la parte superior y el fondo es de 0.2 *cm* de grueso y el metal de los lados tiene 0.1 *cm* de espesor.

# Examen de Cálculo Multivariable

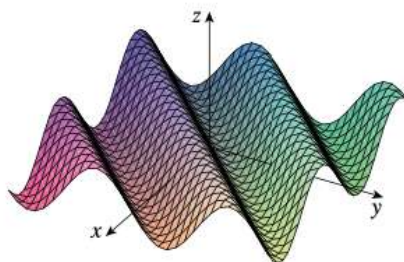
Tipo B

Nombre \_\_\_\_\_  
Grupo:

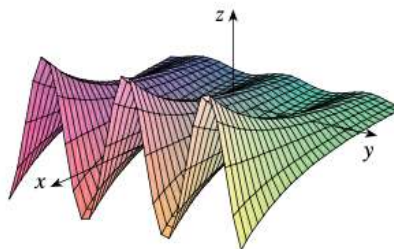
## Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet.

1. (20 puntos) Dibuja los mapas de contorno de las siguientes superficies



(a)



(b)

2. (25 puntos) Sea

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 4y^2}$$

(a) Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

(b) Argumente si la función es continua en  $(0,0)$ .

(c) Especifique el dominio de la función.

3. (20 puntos) Calcule las derivadas parciales de la función

$$f(x,y,z) = \frac{3}{\sqrt{x^3 + y^2 + z^3}} - x^2 \ln(x)yz$$

4. (15 puntos) Suponga que necesitamos conocer una ecuación del plano tangente a la superficie  $S$  en el punto  $P(5, -1, -3)$ . No tenemos una ecuación para  $S$  pero sabemos que las curvas

$$r_1(t) = \langle 5 + 3t, -1 - t^2, -3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$r_2(u) = \langle 3u - 1, 2u - 5, 2u^2 - 11 \rangle$$

se encuentran ambas en  $S$ . Encuentre una ecuación del plano tangente en  $P$ .

5. (20 puntos) Estime la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 14 *cm* de altura y 3 *cm* de diámetro. Se sabe que el metal para la parte superior y el fondo es de 0.3 *cm* de grueso y el metal de los lados tiene 0.5 *cm* de espesor.



**Cálculo multivariable, 3er. examen parcial**  
Tipo A



Nombre \_\_\_\_\_

### Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet. Escoja adecuadamente los ejercicios a resolver, tomando en cuenta su ponderación, para obtener la mayor cantidad de puntaje.

- (10 puntos) La temperatura en un punto  $(x, y)$  es  $T(x, y)$ , medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de  $t$  segundos está dada por  $x = \sqrt{1+t}$ ,  $y = 2 + 1/3 t$ , donde  $x$  y  $y$  se miden en  $cm$ . La función temperatura satisface  $T_x(2, 3) = 4$  y  $T_y(2, 3) = 3$ . ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?
- (20 puntos) La producción de trigo en un año dado,  $W$ , depende de la temperatura promedio  $T$  y de la precipitación pluvial anual  $R$ . Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de  $0.15^\circ C/año$ , y que la precipitación está disminuyendo a razón de  $0.1cm/año$ . También estiman que, a niveles de producción actuales  $\partial W/\partial T = -2$  y  $\partial W/\partial R = 8$ .
  - ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
  - Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo  $dW/dt$ .

- (20 puntos) Sea

$$P = \sqrt{x^2 e^{2y} + y^2 e^{2x} + e^{2xy}}$$

- Expresa  $P$  como una función de las variables  $u, v$  y  $w$ , donde  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  y  $w = w(x, y)$
  - Use la regla de la cadena para calcular  $\partial P/\partial x$  y  $\partial P/\partial y$ .
- (20 puntos) Sea  $V$  el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de  $f(x, y) = 1 + x^2 + 3y$  y arriba del rectángulo  $R = [1, 3] \times [0, 4]$ . Use una suma de Riemann con  $n = m = 4$  y elija como puntos muestra a las esquinas inferiores derechas para aproximar dicho volumen.



5. (20 puntos) Calcule la integral iterada

$$\int \int_R x \sin(x+y) dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi/6, 0 \leq y \leq \pi/3\}$$

6. (10 puntos) Calcule la integral iterada

$$\int \int_R y + xy^{-2} dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$$

7. (10 puntos) La integral

$$\int \int_R \sqrt{9-y^2} dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$$

representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.



**Cálculo multivariable, 3er. examen parcial**  
Tipo B



Nombre \_\_\_\_\_

### Instrucciones generales

Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet. Escoja adecuadamente los ejercicios a resolver, tomando en cuenta su ponderación, para obtener la mayor cantidad de puntaje.

- (10 puntos) La temperatura en un punto  $(x, y)$  es  $T(x, y)$ , medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de  $t$  segundos está dada por  $u = \sqrt{1 + 2t}$ ,  $v = 1 + 1/4 t$ , donde  $u$  y  $v$  se miden en  $cm$ . La función temperatura satisface  $T_u(3, 2) = 4$  y  $T_v(3, 2) = 3$ . ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 4 segundos?
- (20 puntos) La producción de trigo en un año dado,  $P$ , depende de la temperatura promedio  $T$  y de la precipitación pluvial anual  $R$ . Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de  $0.15^\circ C/año$ , y que la precipitación está disminuyendo a razón de  $0.1cm/año$ . También estiman que, a niveles de producción actuales  $\partial P/\partial T = -3$  y  $\partial P/\partial R = 9$ .
  - ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
  - Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo  $dP/dt$ .
- (20 puntos) Sea

$$W = r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \theta \sin(\theta) + r^2 \theta \cos(\theta)$$

- Expresa  $W$  como una función de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , donde  $x = x(r, \theta)$ ,  $y = y(r, \theta)$  y  $z = z(r, \theta)$
  - Use la regla de la cadena para calcular  $\partial W/\partial r$  y  $\partial W/\partial \theta$ .
- (20 puntos) Sea  $V$  el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de  $f(x, y) = 1 + y^2 + 3x$  y arriba del rectángulo  $R = [0, 4] \times [1, 3]$ . Use una suma de Riemann con  $n = m = 4$  y elija como puntos muestra a las esquinas inferiores derechas para aproximar dicho volumen.

5. (20 puntos) Calcule la integral iterada

$$\int \int_R u \sin(u+v) dA, \quad R = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq \pi/6, 0 \leq v \leq \pi/3\}$$

6. (10 puntos) Calcule la integral iterada

$$\int \int_R x + yx^{-2} dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$$

7. (10 puntos) La integral

$$\int \int_R \sqrt{9-x^2} dA, \quad R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$$

representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.



## Cálculo multivariable, Examen extraordinario



Nombre \_\_\_\_\_

### Instrucciones generales

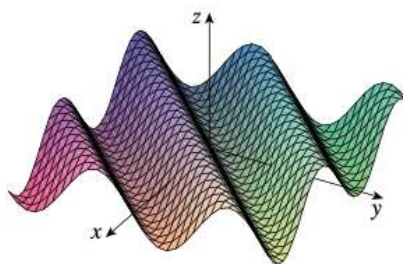
Muestre todo el procedimiento en los problemas. Las respuestas sin justificación no obtendrán puntaje completo. Puede usar calculadora básica, pero no se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos conectados a internet.

1. Encuentra el ángulo entre los vectores:

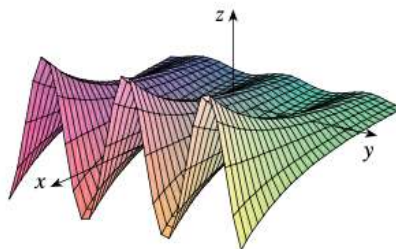
$$\mathbf{a} = (1, 1, -1), \quad \mathbf{b} = (2, 1, -\sqrt{3})$$

¿Son paralelos, ortogonales u oblicuos? ¿Qué puede decir de la dirección de cada uno de ellos?

2. Calcula la proyección del vector  $\mathbf{a} = (3, 4, -1)$  sobre el vector  $\mathbf{b} = (-1, 6, 1)$ .
3. Dibuja los mapas de contorno de las siguientes superficies



(a)



(b)

4. Sea

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 4y^2}$$

(a) Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

(b) Argumente si la función es continua en  $(0, 0)$ .

(c) Especifique el dominio de la función.

5. Calcule las derivadas parciales de la función

$$f(x, y, z) = \frac{3}{\sqrt{x^3 + y^2 + z^3}} - x^2 \ln(x)yz$$

6. La temperatura en un punto  $(x, y)$  es  $T(x, y)$ , medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de  $t$  segundos está dada por  $u = \sqrt{1 + 2t}$ ,  $v = 1 + 1/4 t$ , donde  $u$  y  $v$  se miden en  $cm$ . La función temperatura satisface  $T_u(3, 2) = 4$  y  $T_v(3, 2) = 3$ . ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 4 segundos?

7. La producción de trigo en un año dado,  $P$ , depende de la temperatura promedio  $T$  y de la precipitación pluvial anual  $R$ . Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de  $0.15^\circ C/año$ , y que la precipitación está disminuyendo a razón de  $0.1cm/año$ . También estiman que, a niveles de producción actuales  $\partial P/\partial T = -3$  y  $\partial P/\partial R = 9$ .

(a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?

(b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo  $dP/dt$ .

8. Sea

$$W = r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \theta \sin(\theta) + r^2 \theta \cos(\theta)$$

(a) Exprese  $W$  como una función de las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , donde  $x = x(r, \theta)$ ,  $y = y(r, \theta)$  y  $z = z(r, \theta)$

(b) Use la regla de la cadena para calcular  $\partial W/\partial r$  y  $\partial W/\partial \theta$ .

9. Calcule la integral iterada

$$\int \int_R u \sin(u + v) dA, \quad R = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi/6, 0 \leq v \leq \pi/3\}$$

10. La integral

$$\int \int_R \sqrt{9 - x^2} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$$

representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPTO DE FORMACIÓN BÁSICA



Prof. CRMG

Fecha:

Alumno:

Resolver solo 4 de los 6 problemas.

1.- Verificar que los tres planos tienen un punto en común y calcular sus coordenadas.

$$x - 2y + z - 7 = 0, 2x + y - z + 2 = 0, x - 3y + 2z - 11 = 0$$

2.- Encontrar el plano que pasa por los puntos  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(3, 2, 1)$  y es perpendicular al plano  $4x - y + 2z = 7$ .

3.- Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  los planos  $2x - y + 3z = 2$ ,  $x + 2y - z = b$ ,  $ax + y - 6z = -10$ .  
Tienen un punto en común y pasan por una recta.

4.- Determine el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(1, 1, -1) \quad \text{y} \quad (x, y, z) = (1, 1, 2) + t(-4, 2, -2)$$

5.- Hallar el punto donde se intersecan la recta y el plano.

$$x = -2 - 2t, y = 1 + 3t, z = 3 + 2t, x + 2y - 2z + 6 = 0$$

6.- Si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores unitarios y  $\theta$  es el ángulo entre ellos, demostrar que:

$$\frac{1}{2}|\vec{a} - \vec{b}| = |\sin \frac{\theta}{2}|$$

# Segundo Parcial

Resolver solo cuatro de seis ejercicios.

---

Dadas  $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3xz\mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ . Encuentre  $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$  y  $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$  en el punto  $(1, -1, 2)$ .

---

Pruebe que  $\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\mathbf{i} + (3x^3y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\mathbf{k}$  no es solenoidal, pero  $\mathbf{B} = xyz^2\mathbf{A}$  sí lo es.

---

Dadas  $\mathbf{A} = x^2z\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = y^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$  y  $\phi = 2x^2 + yz$ . Calcule  
a)  $\mathbf{A} \cdot (\nabla \phi)$ , b)  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$ , c)  $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ , d)  $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla)$  y e)  $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$ .

Elegir solo dos incisos

---

Sea  $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ . Encuentre  $\nabla^2\phi$ .

---

Sea  $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$ . Determine  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$  en el punto  $(2, -1, 0)$ .

---

Sean  $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}$  y  $\phi = x^2yz$ . En el punto  $(1, 1, 1)$ , encuentre lo siguiente:  
a)  $\nabla \times \mathbf{A}$ , b)  $\text{rot}(\phi\mathbf{A})$ , c)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ , d)  $\nabla[\mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{A}]$  y e)  $\text{rot grad}(\phi\mathbf{A})$ .

Elegir solo dos incisos

# Tercer Parcial

*Resolver solo cuatro ejercicios de seis*

---

1.-

Suponga que  $\mathbf{R}(t) = (3t^2 - t)\mathbf{i} + (2 - 6t)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$ . Encuentre a)  $\int \mathbf{R}(t) dt$

---

2.-

Sea  $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ . Evalúe a)  $\int_1^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} dt$ .

---

3.-

Verifique el teorema de Green en el plano para  $\oint_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ , donde  $C$  es la frontera de la región definida por a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ ; b)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ .

**Solo hacer un inciso a) o b)**

---

4.-

Evalúe  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ , donde  $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  y  $S$  es:

La superficie del paralelepípedo limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$  y  $z = 3$ .

---

5.-

Verifique el teorema de Stokes para  $\mathbf{A} = (y - z + 2)\mathbf{i} + (yz + 4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ , donde  $S$  es la superficie del cubo  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$  y  $z = 2$ , sobre el plano  $xy$ .

---

6.-

Demuestre que  $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \sin x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$  es un campo de fuerzas conservativo.



## Primer Examen Parcial de Cálculo Multivariable

Grupo:

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Hallar la ecuación para el plano que pasa por  $(2, -1, 3)$ ,  $(0, 0, 5)$  y  $(5, 7, -1)$ .

2. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto  $(1, 2, -3)$  y es perpendicular a la recta  $\vec{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$ .

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por  $(1, -2, -3)$  y es perpendicular al plano  $3x - y - 2z + 4 = 0$ .

4. Hallar una ecuación del plano que contiene las dos rectas paralelas:

$$\vec{r}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$$

$$\vec{r}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1)$$

5. Calcular la distancia del punto  $(2, 1, -1)$  al plano  $x - 2y + 2z + 5 = 0$ .

## Segundo Parcial de Cálculo Multivariable

Grupo:

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Calcule las siguientes derivadas parciales  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ .

ii)  $f(x, y) = \ln(x + y) + \tan(xy)$

ii)  $f(x, y) = e^{x+y} \cdot \text{sen}(x^2 + y^2)$

iii)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

iv)  $f(x, y) = -\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

2. En qué espacio vive la gráfica de  $f(x, y) = x^2 + y^3$  ?

3. Suponga que una partícula sigue la trayectoria  $\vec{c}(t)$  se sale por la tangente en el instante  $t = t_0$ . Calcule la posición de la partícula en el instante  $t_1$ .

$$\vec{c}(t) = (\sin(e^t), t, 4 - t^2) \text{ donde } t_0 = 1, t_1 = 2$$

4. Calcule el gradiente  $\nabla f$  para:

a)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5. Sean  $(\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$  y  $r = |\vec{r}|$ . Demuestre que:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

### TERCER EXAMEN PARCIAL DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

Grupo:

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Calcule las siguientes integrales:

a)  $\int_{-1}^0 \int_0^{a(1-x^2)^{1/2}} x \, dy \, dx$

b)  $\int_0^1 \int_{y^4}^y (x^4 + y^4) \, dx \, dy, (m, n > 0)$

c)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R e^r r^2 \, dr \, d\theta \, d\phi$

d)  $\int \int_B z \cdot e^{x+y} \, dx \, dy \, dz, (B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1])$

e)  $\int_0^1 \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^3 2 \cos(\pi(x+y+z)) \, dx \, dy \, dz$

2. Calcule la longitud de arco para la curva:  $\left(t + 1, \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2\right)$ ; en  $(1 \leq t \leq 2)$ .

## EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO MULTIVARIABLE

Grupo:

Nombre: \_\_\_\_\_

1. Demostrar que el área del triángulo con vértices  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  es el valor absoluto de:

$$\frac{1}{2} * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

b) Calcule el área del triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(-1,-1)$

2. Usar Métodos vectoriales para probar que la distancia del punto  $(x_1, y_1)$  a la recta  $ax + by = c$ , está dada por

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3) Halle la ecuación del plano tangente en  $(1,0,1)$ , para  $f(x, y, z) = x * \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ .

4) Resuelva las siguientes integrales

a)  $\int_{-1}^0 \int_0^{|x|} x \, dy \, dx$

b)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R e^r r^2 \, dr \, d\theta \, d\phi$

c)  $\int \int_B z \cdot e^{x+y} \, dx \, dy \, dz, (B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1])$

5. Calcule la longitud de arco para la curva:  $\left(t + 1, \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2\right)$ ; en  $(1 \leq t \leq 2)$ .



# ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

## Primer Examen departamental

### Calculo Multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_

grupo: \_\_\_\_\_

Resuelva los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo su procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Los problemas con inconsistencias en la notación tienen un valor de cero. Toda actitud de deshonestidad académica implica un valor de cero del examen. La duración del examen es de 90 minutos.

Solo resuelva 5 ejercicios unicamente

- (2 puntos) Si  $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ,  $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ , calcular
  - $\vec{A} \cdot \vec{B}$
  - $A, B$
  - $|3\vec{A} + 2\vec{B}| |\vec{A}|$
  - $(2\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - 2\vec{B})$
- (2 puntos) Encuentre los valores de  $p$ , para que los vectores  $(p+1)\hat{i} + (p-2)\hat{j} - 2p\hat{k}$ ,  $(p-1)\hat{i} + (7-2p)\hat{j} + (p-5)\hat{k}$ ,  $-2p\hat{i} + (p-2)\hat{j} + (p+1)\hat{k}$ , sean coplanares
- (2 puntos) Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , dos vectores en distinta dirección y  $\vec{A} = (x+4y)\vec{a} + (x-3y-1)\vec{b}$  y  $\vec{B} = (y-x+3)\vec{a} + (2x-3y-1)\vec{b}$ . Hallar los valores de  $x$  y  $y$ , de modo que  $2\vec{A} = 3\vec{B}$
- (2 puntos) Demostrar la identidad  $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot [(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})] = 2\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$
- (2 puntos) Dado  $a = 3$ , y  $b = 2$  con un ángulo entre vectores de  $120^\circ$ . Hallar las magnitudes de los vectores  $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$  y  $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$  así como el ángulo entre ellos
- (2 puntos) Demostrar que los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , se encuentran sobre una línea si cumplen con  $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = \vec{0}$
- (2 puntos) Sean  $ABC$  los vértices de un triángulo arbitrario, y sea  $O$ , un punto cualquiera dentro del triángulo donde  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  y  $\vec{c} = \vec{OC}$ . Demostrar que el área del triángulo  $ABC$  es igual a  $\frac{|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|}{2}$
- (2 puntos) En un trapecio rectangular  $ABCD$  las diagonales son mutuamente perpendiculares y la razón entre las longitudes de las bases es  $|BC|/|AD| = \lambda$ . Hallar la razón entre sus diagonales

M. en C. Miguel Abel Leon Hernandez  
Profesor de calculo multivariable





# ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

## Segundo Examen departamental Calculo Multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_

grupo: \_\_\_\_\_

Resuelva los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo su procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Los problemas con inconsistencias en la notación tienen un valor de cero. Toda actitud de deshonestidad académica implica un valor de cero del examen. La duración del examen es de 90 minutos.

Solo resuelva 5 ejercicios unicamente

1. (2 puntos) Sea  $\vec{r}(t)$  una función vectorial tal que  $|\vec{r}(t)| = R = cte$  con  $|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}| = A = cte$  demostrar que  $\vec{r}(t)$  y  $\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$  son paralelos
2. (2 puntos) Si  $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{w} \times \vec{a}$ , y  $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{w} \times \vec{b}$ , demostrar que  $\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \vec{w} \times (\vec{a} \times \vec{b})$
3. (2 puntos) Demostrar que el cono  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  y la esfera  $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$  son tangentes en  $(0, \pm b, c)$
4. (2 puntos) ¿Que ángulo forman en intersección el cilindro  $x^2 + y^2 = R^2$  y la esfera  $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$  en el punto  $\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ?
5. (2 puntos) Demostrar que las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ,  $y = x \tan \varphi$  y  $z^2 = (x^2 + y^2) \tan^2 \varphi$  que son superficies de sistema de coordenadas esfericas son ortogonales entre si
6. (2 puntos) Si  $\hat{a}$  es un vector unitario constante. Demostrar que

$$\hat{a} \bullet [\nabla (\vec{v} \bullet \hat{a}) - \nabla \times (\vec{v} \times \hat{a})] = \nabla \bullet \vec{v}$$

7. (2 puntos) Use multiplicadores de Lagrange demostrar que la minima distancia de un punto  $\vec{r}_0$  al plano  $\vec{r} \bullet \vec{N} = D$  es  $d = \frac{|D - \vec{r}_0 \bullet \vec{N}|}{N}$
8. (2 puntos) Use multiplicadores de Lagrange demostrar que la minima distancia de un punto  $\vec{r}_0$  a la esfera  $|\vec{r} - \vec{a}| = R$  es  $d = ||\vec{r}_0 - \vec{a}| - R|$

M. en C. Miguel Abel Leon Hernandez  
Profesor de calculo multivariable









# ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

## Tercer Examen departamental Calculo Multivariable



Nombre: \_\_\_\_\_

grupo: \_\_\_\_\_

Resuelva los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo su procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Los problemas con inconsistencias en la notación tienen un valor de cero. Toda actitud de deshonestidad académica implica un valor de cero del examen. La duración del examen es de 90 minutos.

Solo resuelva 5 ejercicios unicamente

- (2 puntos) Calcular la longitud de arco de la función  $y = \ln\left(\coth \frac{x}{2}\right)$  desde el  $x = a$  al punto  $x = b$  con  $0 < a < b$
- (2 puntos) Calcular la integral  $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy$
- (2 puntos) Calcular el área sobre la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  que está dentro de la superficie  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  donde  $z > 0$  con  $0 < b < a$
- (2 puntos) Hallar el volumen acotado por la porción de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$  que está dentro de  $by = x^2 + z^2$
- (2 puntos) Calcular la superficie sobre  $x^2 + y^2 = 4a - 2az$  que se encuentra entre las superficies  $z = \alpha x$  y  $z = \beta x$  con  $\alpha < \beta$
- (2 puntos) Calcular  $\int_S \vec{F} \bullet d\vec{S}$  para  $\vec{F} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$  y  $S$  es la superficie sobre  $x + y + z = 0$  dentro del contorno de la esfera dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
- (2 puntos) Calcular  $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \bullet \vec{r}$  el campo vectorial  $\vec{F} = (y^2 - z^2)\hat{i} + (z^2 - x^2)\hat{j} + (y^2 - y^2)\hat{k}$  donde  $\mathcal{C}$  se define por la sección del cubo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$  que intersecta con  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  en sentido contrario de las manecillas del reloj.
- (2 puntos) Si  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , son vectores constantes y  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  es el vector de posición. En la región  $E$ , dada por  $E = \left\{ 0 \leq \vec{a} \cdot \vec{r} \leq \alpha, \quad 0 \leq \vec{b} \cdot \vec{r} \leq \beta, \quad 0 \leq \vec{c} \cdot \vec{r} \leq \gamma \right\}$ . Calcular

$$\int \int \int_E (\vec{a} \cdot \vec{r}) (\vec{b} \cdot \vec{r}) (\vec{c} \cdot \vec{r}) dx_1 dx_2 dx_3$$

M. en C. Miguel Abel Leon Hernandez  
Profesor de calculo multivariable

