

ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.. (a) Desarrollar y simplificar la expresión

$$(5\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}) \cdot (2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}) \times (\mathbf{A} - 5\mathbf{B} + 7\mathbf{C})$$

(b) Comprobar el resultado para  $\mathbf{A} = [1, -3, 2]$ ,  $\mathbf{B} = [4, 1, -1]$  y  $\mathbf{C} = [5, 3, -4]$ .

2.. Sean dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en el plano  $xy$  con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Si  $\alpha = \angle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  es el ángulo entre las rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ . Demostrar que

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

3.. Hallar la distancia del punto  $P_1 = (-7, 3, -4)$  al plano  $\mathcal{P}$ , donde

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 4u - 3v - 1 \\ y = 3u + v - 2 \\ z = u - 5v + 3 \end{cases}$$

4.. Hallar la ecuación de la recta  $\mathcal{L}_2$  que pasa por el punto  $A = (2, -4, 1)$  y que es paralela a la recta  $\mathcal{L}_1$ , donde  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  es la intersección de los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , con

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 5z = 8\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = u - v + 3 \\ y = 2u - 3v - 1 \\ z = -u - 4v + 2 \end{cases}$$

5.. Dados los vectores  $\vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{a}_2 = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$  y  $\vec{a}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ . (a) Comprobar que son no coplanares. (b) Obtener con dichos vectores a los vectores  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$  y  $\vec{b}_3$ . (c) Para el vector  $\vec{d} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$ , comprobar que

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$



ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.\_ (a) Desarrollar y simplificar la expresión

$$(3\mathbf{A} - \mathbf{B} + 5\mathbf{C}) \cdot (2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - \mathbf{C}) \times (4\mathbf{A} + \mathbf{B} - 5\mathbf{C})$$

(b) Comprobar el resultado para  $\mathbf{A} = [-1, 2, -5]$ ,  $\mathbf{B} = [1, -4, 3]$  y  $\mathbf{C} = [3, -1, 1]$ .

2.\_ Sean dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en el plano  $xy$  con pendientes no nulas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Demostrar que  $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_1$  es perpendicular a  $\mathcal{L}_2$ , si  $m_2 = -1/m_1$ .

3.\_ Hallar la ecuación del plano  $\mathcal{P}_2$  que dista 10 unidades del plano  $\mathcal{P}_1$ , donde

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = 4u - 3v - 1 \\ y = 3u + v - 2 \\ z = u - 5v + 3 \end{cases}$$

4.\_ Hallar la distancia del punto  $P_1 = (3, -7, 1)$  a la recta  $\mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  es la intersección de los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , con

$$\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 5z = -1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 4\}$$

5.\_ Dados los vectores  $\vec{a}_1 = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ,  $\vec{a}_2 = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$  y  $\vec{a}_3 = -4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ . (a) Comprobar que son no coplanares. (b) Obtener con dichos vectores a los vectores  $\vec{b}_1$ ,  $\vec{b}_2$  y  $\vec{b}_3$ . (c) Para el vector  $\vec{d} = -7\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ , comprobar que

$$\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{b}_1)\vec{a}_1 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_2)\vec{a}_2 + (\vec{d} \cdot \vec{b}_3)\vec{a}_3$$



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.



Departamento de Ciencias Básicas.

Materia: Análisis vectorial. Nivel: I Fecha : 07 de octubre de 2024.

Profesor: Dr. Samuel Domínguez Hernández Examen : Primer departamental.

Alumno: \_\_\_\_\_ Grupo: 1CM8.

## INSTRUCCIONES

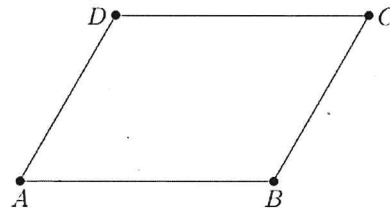
1. Puede utilizar calculadora y formulario.
2. Escriba su nombre y grupo en todas las hojas.
3. Justifique todas sus respuestas.
4. Prohibido utilizar dispositivos electrónicos para ver fotos.
5. Todos los problemas valen  $3.\bar{3}$  puntos.

## PROBLEMAS

1. Dos ciudades  $A$  y  $B$  están situadas una frente a otra en las dos orillas de un río de 9 km de ancho, siendo la velocidad del agua de 6 km/h. Un hombre en  $A$  quiere ir a la ciudad  $C$  que se encuentra a 7 km aguas arriba de  $B$  y en su misma ribera. Si la embarcación que utiliza tiene una velocidad máxima de 12 km/h y desea llegar a  $C$  en el menor tiempo posible, ¿qué dirección debe

tomar y cuánto tiempo emplea en conseguir su propósito?

2. Dado el siguiente paralelogramo



pruebe que

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

3. ¿Para qué valores de  $a$  son  $\vec{A} = \hat{i} + a\hat{j} - 2\hat{k}$  y  $\vec{B} = -4\hat{i} + 2a\hat{j} + a\hat{k}$ .
4. Hallar el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos  $P(-1, 2, 3)$ ,  $Q(1, 3, 2)$  y  $R(2, -1, 1)$ .

# B



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Primer parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ 1CV1

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Si  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , mostrar

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} \cdot \text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\cos^2(\theta)$$

2. (20 puntos) Si  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ . Mostrar que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$$

3. (20 puntos) Obtener la ecuación segmentaria para la recta de intersección de los planos  $3x - 2y + z = 1$ ,  $2x + y - 3z = 3$  y el ángulo entre los planos.
4. (10 puntos) Sea  $L_1$  la recta que pasa por el origen y el punto  $P(2, 0, -1)$ ,  $L_2$  la recta cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = 1 + 3t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 1 + 2t$ . Obtener la distancia entre  $L_1$  y  $L_2$ .
5. (10 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos  $P(3, 0, -1)$ ,  $Q(-2, -2, 3)$  y  $R(7, 1, -4)$ .
6. (20 puntos) Deducir una fórmula para determinar la distancia entre una recta  $L$  y un punto  $P$  en  $R^3$ .



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Primer parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ 1CM5

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Si  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , mostrar

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} \cdot \text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\cos^2(\theta)$$

2. (20 puntos) Sean  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$  vectores en  $R^3$ . Mostrar que se cumplen las siguientes identidades.

- $|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$
- $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$

3. (20 puntos) Obtener la ecuación segmentaria para la recta de intersección de los planos  $x + y + z = 1$ ,  $x + 2y + 2z = 1$  y obtener el ángulo entre los planos.

4. (10 puntos) Determine la ecuación de la recta que pasa por  $(-6, 2, 3)$  y es paralela a la recta  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y = z + 1$ , además obtener la distancia del origen a dicha recta.

5. (10 puntos) Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos  $P(x_0, y_0, z_0)$ ,  $Q(x_1, y_1, z_1)$  y  $R(x_2, y_2, z_2)$ .

6. (20 puntos) Deducir una fórmula para determinar la distancia entre un plano y un punto  $P$  en  $R^3$ .

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Se tienen los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  demostrar la *ley del paralelogramo*

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$$

Su interpretación geométrica dice que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales del paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados.

(2 puntos)

2. Sea  $\pi$  el plano en  $\mathbb{R}^3$  con un vector normal  $\mathbf{n}$  que pasa por el punto A con vector de posición  $\mathbf{a}$ . Si  $\mathbf{b}$  es el vector de posición de un punto B en  $\mathbb{R}^3$ , determine que la distancia D entre B y  $\pi$  esta dada por:

$$D = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{n}\|}$$

(2 puntos)

3. Encuentre la ecuación de los planos  $(\pi_1, \pi_2)$  que son paralelos al plano  $\pi: x + 2y - 2z = 1$ , los cuales se encuentran a una distancia de 2 unidades del plano  $\pi$ .

(2 puntos)

4. Determinar si las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas, perpendiculares, secantes o alabeadas, en el caso que se corten en un punto encontrar el punto de intersección.

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4}, \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$$

(2 puntos)

5. Realizar las operaciones solicitadas.

i)  $[(-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})x\hat{i}][x(\hat{i} + \hat{j})]$

ii)  $[(\hat{i} - \hat{j})x(\hat{j} - \hat{k})][x(\hat{i} + 5\hat{k})]$

iii)  $[2\hat{i} + \hat{j}] \cdot [(\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})x(4\hat{i} + \hat{k})]$

(2 punto)

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Sea  $L$  la recta determinada por  $P_1(1, -1, 2)$  y  $P_2(-2, 3, 1)$  y sea  $\pi$  el plano determinado por  $Q_1(2, 0, -4)$ ,  $Q_2(1, 2, 3)$ ,  $Q_3(-1, 2, 1)$ . Encontrar, cuando exista el punto de intersección de  $L$  y  $\pi$

(2 puntos)

2. Resolver cada inciso

i) Si tenemos que  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 4$  calcular  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

ii)  $\text{proy}_{\vec{b}} \alpha \vec{a} = \alpha \text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(2 puntos)

3. Sea la recta parametrizada por  $L = \begin{cases} x = t \\ y = mt + b \\ z = 0 \end{cases}$ , en el plano  $xy$ , y sea el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ , demostrar que la distancia entre el punto y la recta está dada por:

$$d_{P_0, L} = \sqrt{\frac{(1 + m^2)z_0^2 + [y_0 - (mx_0 + b)]^2}{1 + m^2}}$$

(2 puntos)

4. Establecer las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto  $Q(0, 1, 2)$  y es paralelo al plano  $\pi: x + y + z = -2$  y es perpendicular a la recta  $L: \vec{r}(t) = (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$

(2 puntos)

5. Realizar las operaciones solicitadas.

i)  $[(-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) \times \hat{i}] \times [\hat{i} + \hat{j}]$

ii)  $[(\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} - \hat{k})] \times [\hat{i} + 5\hat{k}]$

iii)  $[2\hat{i} + \hat{j}] \cdot [(\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \times (4\hat{i} + \hat{k})]$

(2 punto)

México D.F. a 10 de octubre de 2024.

Instituto Politécnico Nacional ESCOM  
1<sup>er</sup> Examen de Análisis Vectorial

Nombre del Alumno: .....

Grupo: ..... No. de Boleta .....

**Instrucciones:** Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas. "No se permite el uso de Formulario ni calculadora";

1. Demostrar que  $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$ , de una interpretación geométrica.
2. En un paralelogramo, la recta que une el vértice superior izquierdo con el punto localizado a un cuarto en el lado opuesto divide a la diagonal del paralelogramo, encuentre la razón de proporcionalidad.
3. Si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son vectores unitarios y  $\theta$  es el ángulo entre ellos, demostrar que:

$$\frac{1}{2}|\vec{a} - \vec{b}| = |\sin(\frac{1}{2}\theta)|$$

4. Dados los conjuntos de vectores  $C_1 = \{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 1]\}$  y  $C_2 = \{[1, -6, 2], [0, 2, 7], [-2, 12, -4]\}$ , determine cual es linealmente independientes y utilícelo para escribir al vector  $\vec{A} = [5, 3, -1]$  como una combinación lineal.

*Prof: Miguel Ángel González T.*



- Este examen es individual.
- Los ejercicios se calificarán únicamente si tienen procedimiento y argumentos.

1. Demuestre la propiedad:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} + \mathbf{b})$$

2. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1/t^2 \rangle$ . Trace la trayectoria de la partícula y los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  para  $t = 2$ . Encuentra el ángulo que forma  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{a}$ . ¿Atraviesa la partícula el eje  $y$ ? Explique.

3. Determine la ecuación del plano que contiene las rectas

$$\frac{x-1}{-2} = y-4 = z, \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

4. Encuentre las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por  $(-4, 5, 2)$  y es paralela al plano  $xy$  y al plano  $yz$ .

5. Utilice las trazas para dibujar la superficie dada por:

$$-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36$$

6. Trace algunas curvas de nivel de la función

$$h(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$$

7. Encuentre una parametrización de longitud de arco de

$$\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, t \sin t, 3 \rangle$$

verifique su re-parametrización, demostrando que la derivada del vector  $\mathbf{r}(s)$  es unitaria.

8. A través de la diferencial total compare  $dz$  y  $\Delta z$  cuando la función dada varía en  $(x,y)$  del primer al segundo punto.

$$z = x^2 + x^2 y^2 + 2 \text{ de } (1,1) \text{ a } (0.9, 1.1)$$

9. A partir de la ecuación:

$$z - c = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \quad c > 0.$$

Sabiendo que el área de la superficie  $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$  es  $AB\pi$ .  
Expresa el área de la sección transversal perpendicular al eje  $z$  como función de  $z$ , donde  $z \leq c$ .

10. Sean  $F$  y  $G$  funciones con segundas derivadas parciales, muestre que  $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$  satisface la ecuación de onda

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

11. Sea  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ , la ecuación vectorial de una recta, con  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{v}$  vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco

$$s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du$$

para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Demuestre que  $\mathbf{r}'(s)$  es un vector unitario.

12. Si  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  y  $r = |\mathbf{r}|$ , demuestre que  $\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{r}/r$ .

1. Muestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

$$\int_{(1, 2, 1)}^{(3, 4, 1)} (2x + 1) dx + 3y^2 dy + \frac{1}{z} dz$$

2. Emplee el teorema de Green para evaluar la integral

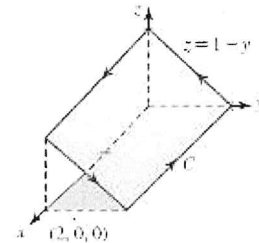
$$\oint_C 2x^3y dx + (3x + y) dy,$$

donde C es la elipse  $9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$

3. Usando el teorema de Stokes, evalúe  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k};$$

Suponga que C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.



C es la frontera del plano  $z = 1 - y$  que se ilustra en la figura.

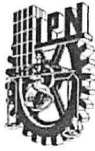
4. Mediante el teorema de la divergencia. Determine el flujo hacia fuera

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \text{ del campo vectorial dado } \mathbf{F}.$$

$$\mathbf{F} = (xi + yj + zk)/(x^2 + y^2 + z^2);$$

D la región acotada por las esferas concéntricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, b > a$$



ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** *Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.*

- 1.\_ Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$36x^2 + 25y^2 + 216x - 50y - 551 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de  $t = \frac{5\pi}{4}$ .

- 2.\_ Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 64$  en el punto que corresponde al valor de los ángulos  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  y  $\phi = \frac{7\pi}{4}$ .

- 3.\_ Para la función  $\mathbf{f}(x, y) = [\exp(-\frac{y}{x}), x^y + y^x, \arctan(\frac{y}{x})]$ , calcular  $D\mathbf{f}$ .

- 4.\_ Para las funciones  $f(u, v, w) = 3u^3v^2w^3$  y  $\mathbf{g}(x, y, z) = [e^{-x^2-y^2-z^2}, e^{-x^2y^2z^3}, \ln(100 - 2x^2 - 3y^3 + 4z^2)]$  aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de  $f \circ \mathbf{g}$ .

- 5.\_ Dada la función vectorial  $\mathbf{f} = (6x^2y^2z^3 + 4y^3 + 15x^2z^2 - 5)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 + 12xy^2 + 4yz^3 + 2)\mathbf{j} + (6x^3y^2z^2 + 10x^3z + 6y^2z^2 - 3)\mathbf{k}$ . a) Mostrar que  $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ . b) Hallar una función escalar  $\phi$  tal que  $\mathbf{f} = \nabla\phi$ .



ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** *Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.*

- 1.\_ Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$36x^2 + 81y^2 + 360x + 324y - 1962 = 0$$

en el punto que corresponde al valor de  $t = \frac{2\pi}{3}$ .

- 2.\_ Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide  $S : 9x^2 + 25y^2 + 16z^2 = 3600$  en el punto  $P_0 = (10, 2\sqrt{23}, -5)$ .

- 3.\_ Para la función  $\mathbf{f}(x, y) = [\exp(\sqrt{\frac{y}{x}}), x^y \cdot y^x, \exp(10 - x^2 - 3y^2)]$ , calcular  $D\mathbf{f}$ .

- 4.\_ Para las funciones  $f(u, v, w) = 7u^2v^3w^2$  y  $\mathbf{g}(x, y, z) = [e^{2x^2-3y^2+4z^2}, e^{-x^3y^2z^3}, \ln(20 - x^2 - 5y^3 + 9z^2)]$  aplicar el segundo caso especial de la regla de la cadena para calcular la derivada de  $f \circ \mathbf{g}$ .

- 5.\_ Dada la función vectorial  $\mathbf{f} = (14xy^3z^2 - 10xz - 9)\mathbf{i} + (21x^2y^2z^2 + 6yz^3 + 3)\mathbf{j} + (14x^2y^3z - 5x^2 + 9y^2z^2 + 5)\mathbf{k}$ . a) Mostrar que  $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ . b) Hallar una función escalar  $\phi$  tal que  $\mathbf{f} = \nabla\phi$ .

México D.F. a 9 de diciembre de 2024.

Instituto Politécnico Nacional ESCOM  
2<sup>do</sup> Examen de Análisis Vectorial

Nombre del Alumno: .....

Grupo: ..... No. de Boleta .....

**Instrucciones:** Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas. "No se permite el uso de Formulario ni calculadora";

1. Si  $\vec{f} = uvw\hat{i} - uw^2\hat{j} - v^3\hat{k}$  y  $\vec{g} = u^3\hat{i} - uvw\hat{j} - u^2w\hat{k}$ , calcular
  - a)  $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u \partial v}$ , en el origen.
  - b)  $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial v^2} \times \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial u^2}$ , en el punto  $(1, 1, 0)$ .
2.
  - a) Hallar el vector tangente unitario  $\hat{T}$ , a la curva representada por la siguiente función vectorial
$$\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\hat{i} + a(1 - \cos t)\hat{j} \quad \text{para todo } t$$
  - b) Verifique el inciso anterior mediante la parametrización de la función vectorial usando el parámetro longitud de arco.
  - c) Hallar un vector unitario  $\hat{n}$  normal en  $(0, 0, 0)$  a la superficie  $S$  representada por  $z = 3x^2 + 4y^2 - 1$
3. Si  $\phi(x, y, z) = xy + yz + zx$ , hallar
  - a)  $\nabla \phi$  en  $(1, 1, 3)$
  - b)  $\frac{\partial}{\partial s} \phi$  en  $(1, 1, 3)$  en la dirección  $[1, 1, 1]$
4. Las curvas coordenadas parabólicas  $(\epsilon, \eta, \phi)$  están dadas por la transformación:

$$\begin{aligned} x &= \epsilon \eta \cos \phi \\ y &= \epsilon \eta \sin \phi \\ z &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2) \end{aligned}$$

Calcule el Jacobiano  $J = [\nabla \epsilon \nabla \eta \nabla \phi]$ .

Prof: Miguel Ángel González T.

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Sea  $F(x, y, z) = 4y\sqrt{2x + 3z} - \frac{5}{z}\ln(5x - 2y^2) = 0$ , con  $x = f(y, z)$  calcular  $D_x$

(2 puntos)

2. Hallar la derivada direccional de  $\phi = 4e^{2x-y+z}$  en el punto  $(1, 1, -1)$  en dirección hacia el punto  $(-3, 5, 6)$

(2 puntos)

3. Verificar las siguientes identidades

$$i) \nabla^2 r^3 = 12r$$

$$ii) \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

(2 puntos)

4. Si  $f$  y  $g$  son funciones dos veces derivables, demuestre que:

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

(2 puntos)

5. Demostrar que la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$  es tangente al elipsoide  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$  en el punto  $(2, 1, 1)$

(2 puntos)

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Sea  $F(x, y, z) = 4y\sqrt{2x + 3z} - \frac{5}{z}\ln(5x - 2y^2) = 0$ , con  $x = f(y, z)$  calcular  $D_x$

(2 puntos)

2. Hallar la dirección según la cual la derivada de la función  $\phi = 2xz - y^2$  en el punto (1,3,2) es máxima. Y cuál es el valor máximo.

(2 puntos)

3. Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso en el que  $w = f(x, t, u, v)$ ,  $x = x(q, r, s)$ ,  $t = t(p, q, r, s)$ ,  $u = u(p, q, r, s)$  y  $v = v(p, q, r, s)$  son todas ellas funciones derivables

(2 puntos)

4. Si  $f$  y  $g$  son funciones dos veces derivables, demuestre que:

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

(2 puntos)

5. Las superficies  $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$  &  $3x^2 + y^2 - 2z = 9$  se cortan en una curva que pasa por el punto (2,1,2) ¿Cuáles son las ecuaciones de los respectivos planos tangentes a las dos superficies en dicho punto?

(2 puntos)



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Sea  $F(x, y, z) = \cos(xyz) + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 0$  con  $z = f(x, y)$  calcular  $D_z$

(2 puntos)

2. Hallar la derivada direccional de  $\phi = 4e^{2x-y+z}$  en el punto  $(1, 1, -1)$  en dirección hacia el punto  $(-3, 5, 6)$

(2 puntos)

3. Verificar las siguientes identidades

$$i) \nabla^2 r^3 = 12r$$

$$ii) \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

(2 puntos)

4. Si  $f$  y  $g$  son funciones dos veces derivables, demuestre que:

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

(2 puntos)

5. Demostrar que la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$  es tangente al elipsoide  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$  en el punto  $(2, 1, 1)$

(2 puntos)

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Sea  $F(x, y, z) = \cos(xyz) + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 0$  con  $z = f(x, y)$  calcular  $D_z$

(2 puntos)

2. Hallar la dirección según la cual la derivada de la función  $\phi = 2xz - y^2$  en el punto  $(1, 3, 2)$  es máxima. Y cuál es el valor máximo.

(2 puntos)

3. Use un diagrama de árbol para escribir la regla de la cadena para el caso en el que  $w = f(x, t, u, v)$ ,  $x = x(q, r, s)$ ,  $t = t(p, q, r, s)$ ,  $u = u(p, q, r, s)$  y  $v = v(p, q, r, s)$  son todas ellas funciones derivables

(2 puntos)

4. Si  $f$  y  $g$  son funciones dos veces derivables, demuestre que:

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2g + g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

(2 puntos)

5. Las superficies  $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$  &  $3x^2 + y^2 - 2z = 9$  se cortan en una curva que pasa por el punto  $(2, 1, 2)$  ¿Cuáles son las ecuaciones de los respectivos planos tangentes a las dos superficies en dicho punto?

(2 puntos)



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.



*Departamento de Ciencias Básicas.*

Materia: Análisis vectorial Carrera: Ingeniería en sistemas computacionales Grupo: 1CMS.

Profesor: Dr. Samuel Domínguez Hernández. Examen: Segundo departamental.

Alumno: \_\_\_\_\_ Fecha: 25 de noviembre de 2024.

**INSTRUCCIONES**

1. Puede utilizar calculadora y formulario.
2. Escriba su nombre y grupo en todas las hojas.
3. Justifique todas sus respuestas.
4. Prohibido utilizar dispositivos electrónicos para ver fotos.
5. Todos los problemas valen 2 puntos.

**PROBLEMAS**

1. Hallar la ley de velocidades y de aceleraciones de una partícula que se mueve a lo largo de la curva  $x = 2 \cos 3t$ ,  $y = 8t$ ,  $z = 2 \sin 3t$ . . Idem los módulos de la velocidad y aceleración.

2. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción  $P = bL^\alpha K^\beta$  cumple la ecuación.

$$K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P - L \frac{\partial P}{\partial L}.$$

3. Hallar las constantes  $a$  y  $b$  de forma que la superficie  $ax^2 - byz = (a+2)x$  sea ortogonal a la  $4x^2y = 4 - z^3$  en el punto  $(1, -1, 2)$ .

4. Hallar  $\nabla \left[ r \left( \nabla \left( \frac{1}{r^3} \right) \right) \right]$ .

5. ¿Para qué valor de la constante el rotacional del vector  $\vec{A} = (z^3 - axy)\hat{i} + (2-a)x^2\hat{j} + (a-1)xz^2\hat{k}$  es idénticamente nulo?

B



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Segundo parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ TIPO A

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (10 puntos) Determine la ecuación del plano que contenga la curva C definida por
  - $\vec{r} = (\sin(t), \cos(t), -\cos(t))$  con  $0 \leq t \leq \pi$
2. (20 puntos) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva dada por las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado

$$\begin{aligned}x &= \ln(t+1) \\ y &= t \cos(2t) \\ z &= 2^t\end{aligned}\tag{1}$$
$$\tag{2}$$

en  $(0, 0, 1)$ .

3. (20 puntos) Una partícula en movimiento es  $\vec{a} = \sqrt{2}\sin(t)\hat{i} + \sqrt{2}\cos(t)\hat{j}$  a cualquier  $t$ . Considerando que la velocidad y la posición de la partícula en  $t = \frac{\pi}{4}$  son  $\vec{v}(\frac{\pi}{4}) = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  y  $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = \hat{i} + 2\hat{j} + \frac{\pi}{4}\hat{k}$ , respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en  $t = \frac{3\pi}{4}$ ?
4. (20 puntos) Sea  $R$  la distancia desde un punto fijo  $A(a, b, c)$  a cualquier punto  $P(x, y, z)$ . Mostrar que  $\vec{\nabla}R$  es un vector unitario en la dirección  $AP$ .
5. (10 puntos) Sea  $f(x, y, z) = \frac{x}{y+x}$ . Determine la derivada direccional de  $f$  en  $P(1, 3, 1)$  en dirección al punto  $P_1 = (1, 1, 1)$ . A partir del punto P, ¿en qué dirección la derivada direccional de  $f$  es un máximo?
6. (20 puntos) El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de  $6\text{cm}$  por segundo, y la altura decrece a razón de  $4\text{cm}$  por segundo. ¿cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es de  $12\text{cm}$  y la altura de  $36\text{cm}$ ?



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Segundo parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ TIPO A

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (10 puntos) Determine la ecuación del plano que contenga la curva C, definida por
- $$\vec{r} = (2t, \sin(t), t + 1)$$
2. (20 puntos) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva, dada por las siguientes ecuaciones paramétricas en el punto dado

$$\begin{aligned}x &= e^{-t} \cos(t) \\y &= e^{-t} \sin(t) \\z &= e^{-t}\end{aligned}\quad \begin{aligned}(1) \\(2)\end{aligned}$$

en  $(1, 0, 1)$ .

3. (20 puntos) Una partícula parte del origen con velocidad inicial  $\vec{v}(0) = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ , el vector aceleración es  $\vec{a} = t\hat{i} + \hat{j} + t^2\hat{k}$ . Determine su función de posición.
4. (20 puntos) Encuentre el ángulo entre las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = \left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2$  en el punto  $P\left(\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{1}{12}\right)$ .
5. (20 puntos) El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de  $6\text{cm}$  por segundo, y la altura decrece a razón de  $4\text{cm}$  por segundo. ¿cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es de  $12\text{cm}$  y la altura de  $36\text{cm}$ ?
6. (10 puntos) Sea  $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$ . Determine la derivada direccional de  $f$  en  $P(1, 0, 0)$  en dirección al punto  $P_1 = (1, 1, 1)$ . A partir del punto P, ¿en qué dirección la derivada direccional de  $f$  es un máximo?



ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** *Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.*

- 1.\_ Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido  $z = 49 - x^2 - y^2$  acotado por los planos coordenados  $yz$  y  $zx$  en el primer octante.
- 2.\_ Calcular la integral  $\oint \mathbf{f} \times d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{f} = -2xy^2\mathbf{i} + 5x^2y^2\mathbf{j}$  y la curva  $C$  es la parte de la elipse  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  en el primer cuadrante.
- 3.\_ Para la función vectorial  $\mathbf{f} = (6x^2y^2z^3 - 10xy^2 - 12x^2z^2 + 2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 10x^2y + 9y^2z^3 - 7)\mathbf{j} + (6x^3y^2z^2 + 9y^3z^2 - 8x^3z + 5)\mathbf{k}$ 
  - a) Demostrar que es conservativo.
  - b) Hallar el potencial escalar  $\phi$  tal que  $\mathbf{f} = \nabla\phi$ .
  - c) Comprobar que  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$ , donde  $P_i = (-1, -1, -1)$  y  $P_f = (1, 1, 1)$  y  $C$  es cualquier curva que una dichos puntos.
- 4.\_ Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas  $y = \sqrt{-x}$  y  $y = \frac{-x}{2}$ . Siendo  $\mathbf{f} = -7xy^2\mathbf{i} + 4x^2y\mathbf{j}$ .
- 5.\_ Si  $\vec{f} = 4yz^2\hat{i} - 3xz\hat{j} + 2xy\hat{k}$ , calcular  $\oiint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ , donde  $S$  es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico  $z = 25 - x^2$  acotado por los planos  $y = 0$  y  $y = 13$  en el primer octante.



ANÁLISIS VECTORIAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** *Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.*

- 1.\_ Calcular el área de la superficie del paraboloide invertido  $z = 64 - x^2 - y^2$  acotado por los planos coordenados  $yz$  y  $zx$  en el primer octante.
- 2.\_ Calcular la integral  $\oint \mathbf{f} \times d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{f} = 5x^2y\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$  y la curva  $C$  es la parte de la elipse  $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$  en el primer cuadrante.
- 3.\_ Para la función vectorial  $\mathbf{f} = (10xy^3z^2 - 6xy^3 + 15x^2z^2 - 4)\mathbf{i} + (15x^2y^2z^2 - 9x^2y^2 + 6y^2z^3 + 5)\mathbf{j} + (10x^2y^3z + 10x^3z + 6y^3z^2 - 1)\mathbf{k}$ 
  - a) Demostrar que es conservativo.
  - b) Hallar el potencial escalar  $\phi$  tal que  $\mathbf{f} = \nabla\phi$ .
  - c) Comprobar que  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_f) - \phi(P_i)$ , donde  $P_i = (-1, -1, -1)$  y  $P_f = (1, 1, 1)$  y  $C$  es cualquier curva que una dichos puntos.
- 4.\_ Comprobar el teorema de Green en el plano para la región encerrada entre las curvas  $y = \sqrt{x}$  y  $y = \frac{x}{2}$ . Siendo  $\mathbf{f} = -5xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ .
- 5.\_ Si  $\vec{f} = 5y^2z\hat{i} - 2xz\hat{j} + 3xy\hat{k}$ , calcular  $\oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$ , donde  $S$  es la superficie cerrada que se forma con el cilindro parabólico  $z = 16 - y^2$  acotado por los planos  $x = 0$  y  $x = 7$  en el primer octante.



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL.**  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.



*Departamento de Ciencias Básicas.*

Materia: Análisis vectorial Carrera: Ingeniería en sistemas computacionales Grupo: 1CMS.

Profesor: Dr. Samuel Domínguez Hernández. Examen: Tercer departamental.

Alumno: \_\_\_\_\_ Fecha: 13 de enero de 2025.

**INSTRUCCIONES**

1. Puede utilizar calculadora y formulario.
2. Escriba su nombre y grupo en todas las hojas.
3. Justifique todas sus respuestas.
4. Prohibido utilizar dispositivos electrónicos para ver fotos.
5. Todos los problemas valen 2 puntos.

**PROBLEMAS**

1. Siendo  $\vec{A} = (2y + 3)\hat{i} + xz\hat{j} + (yz - x)\hat{k}$ , hallar  $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  a lo largo de las siguientes trayectorias:  $x = 2t^2$ ,  $y = t$ ,  $z = t^3$  desde  $t = 0$  a  $t = 1$ .
2. Si  $\vec{A} = (3x^2y^4z^2 + 3y + 4z)\hat{i} + (4x^3y^3z^2 + 3x - 2z)\hat{j} + (2x^3y^4z - 2y + 4x)\hat{k}$ , demostrar que existe una función derivable  $\phi$  de forma que  $\vec{A} = \nabla\phi$  y hallar su expresión.

3. Cambiando el orden de integración, calcule

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{x^2} dx dy.$$

4. Evalúe la integral cambiando a coordenadas polares

$$\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA,$$

donde  $R$  es la región localizada arriba del eje  $x$  dentro del círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .

5. Evalúe

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV,$$

donde  $E$  es la región que yace dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  y entre los planos  $z = -4$  y  $z = 5$ .

**B**



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. En la región  $\varphi(A): x + y = 10, x + y = 4, x = 0, y = 0$  se define la integral siguiente:

$$\iint_{\varphi(A)} (x + y) dx dy$$

Considerando lo anterior determinar lo siguiente

- Dibujar la región  $\varphi(A)$  en coordenadas rectangulares  $(x, y)$
- Escribir las integrales dobles en los ordenes  $dx dy$  y  $dy dx$  con sus límites de integración asociados
- Resolver una de las integrales anteriores (la que considere más sencilla)

(5 puntos)

2. Sea  $S$  la región acotada por la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$ . Dibujar el sólido  $S$  y las proyecciones en los planos correspondientes, así como escribir los 6 órdenes de integración asociados.

$$\iiint_S dx dy dz$$

(5 puntos)

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_.

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. Dibujar la región  $Q$  que da lugar a la integral doble, cambiar el orden de integración y calcular entonces la integral.

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2 dx dy$$

(5 puntos)

2. Sea  $S$  la región acotada por la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$ . Dibujar el sólido  $S$  y las proyecciones en los planos correspondientes, así como escribir los 6 órdenes de integración asociados.

$$\iiint_S dx dy dz$$

(5 puntos)

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Lea con detenimiento y resuelva (con su respectivo desarrollo) cada problema de forma clara, especificando el problema a resolver.

1. En la región  $\varphi(A): x = y, y = 5x, xy = 2, xy = 4$  se define la integral siguiente:

$$\iint_{\varphi(A)} dx dy$$

Considerando lo anterior determinar lo siguiente

- a) Dibujar la región  $\varphi(A)$  en coordenadas rectangulares  $(x,y)$
- b) Escribir las integrales dobles en los órdenes  $dx dy$  y  $dy dx$  con sus límites de integración asociados
- c) Proponer un cambio de variable y dibujar la región  $A$  asociada
- d) Escribir la integral utilizando el teorema de cambio de variable
- e) Resolver una de las integrales anteriores (la que considere más sencilla)

(5 puntos)

2. Sea  $S$  la región acotada por las superficies  $z = 0, z = 5, y = 9, y = x^2$ , determinar el valor de una de las integrales siguiendo los órdenes de integración indicados. Dibujar el sólido  $S$  y las proyecciones en los planos correspondientes

i)  $\iiint_S z \, dz dx dy$

ii)  $\iiint_S z \, dy dx dz$

iii)  $\iiint_S z \, dx dz dy$

(5 puntos)

México D.F. a 13 de enero de 2025.

Instituto Politécnico Nacional ESCOM

3<sup>er</sup> Examen de Análisis Vectorial

Nombre del Alumno: .....

Grupo: ..... No. de Boleta .....

**Instrucciones:** Resolver en forma clara y concisa c/u de los problemas. "No se permite el uso de Formulario ni calculadora";

1. Para un vector arbitrario constante  $\vec{a}$ , y el vector de posición  $\vec{r}$ , mostrar que:

a)  $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a}$

b)  $\nabla \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \nabla \times \left( \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{0}$

2. Hallar  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$  a lo largo de la curva cerrada  $C$  de la figura dada, sabiendo que  $\vec{A} = (x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j}$ .

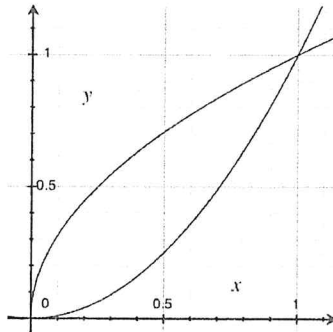


Figura 1: Curva C dada por:  $y = x^2$  y  $y^2 = x$

3. Hallar  $\int \int_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$  donde  $\vec{A} = y\hat{i} + 2x\hat{j} - z\hat{k}$  y  $S$  es la superficie del plano  $2x + y = 6$  situada en el primer octante y limitada por el plano  $z = 4$ .
4. Hallar  $\int \int \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$  siendo  $V$  la región limitada por  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 8 - (x^2 + y^2)$ . Emplear coordenadas cilíndricas

Prof: Miguel Ángel González T.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Tercer parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ TIPO A

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Sea  $\phi = \frac{1}{r}$ , determine la divergencia del gradiente de  $\phi$ .
2. (20 puntos) Determine  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{r})$ , considere que el rotacional de  $\vec{A}$  es cero vectorial.
3. (20 puntos) Sea  $\vec{B} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y - z^2)\hat{j} + (3x - 2y + 4z)\hat{k}$  un campo vectorial. Evalúe la integral de línea  $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$ , donde  $C$  es un círculo con centro en el origen y de radio 3, en el plano  $XY$ .
4. (20 puntos) Con una integral triple determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones  $z = 1 - y^2$ ,  $y = 2x$  y  $x = 3$ , en el primer octante.
5. (20 puntos) Evalúe la integral doble  $\iint_D (x^2 + y^2)^{-2} dA$ , donde  $D$  está definido por  $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
Análisis vectorial  
Tercer parcial



Nombre: \_\_\_\_\_ TIPO B

Resuelva de forma clara, detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Sea  $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}$ , determine el gradiente de la divergencia de  $\vec{F}$ .
2. (20 puntos) Mostrar que  $\vec{A} = r^2\vec{r}$  es conservativo y obtenga su potencial escalar.
3. (20 puntos) Sea  $\phi = 2xy^2z + x^2y$ , evalúe  $\int_C \phi d\vec{r}$ , donde  $C$  es la curva  $x = t$ ,  $y = t^2$  y  $z = t^3$ , con  $0 \leq t \leq 1$ .
4. (20 puntos) Con una integral triple determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones  $z = 1 - y^2$ ,  $y = 2x$  y  $x = 3$ , en el primer octante.
5. (20 puntos) Evalúe la integral doble  $\iint_D (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} dA$ , donde  $D$  es la región acotada por  $x^2+y^2 = 16$  en el primer cuadrante.