

Métodos Numéricos. Semestre 2025-2
Guía para el Examen a Título de Suficiencia.

Contenido:

Estudiar los algoritmos, demostraciones y ejercicios numéricos de los métodos descritos en las unidades del programa sintético de la unidad de aprendizaje

- I. Solución de ecuaciones de una variable
- II. Derivación e integración numérica
- III. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias
- IV. Álgebra lineal numérica
- V. Interpolación y aproximación

Libros de Referencia:

Burden, Richard. Faires, Douglas. Burden, Annette – Numerical Analysis
Chapra, Steven. Canale, Raymond – Numerical Methods for Engineers

Algoritmos:

Programar las implementaciones de los algoritmos de los capítulos 2, 3, 4, 5 y 7 del libro Burden, Richard. Faires, Douglas. Burden, Annette – Numerical Analysis

Ejercicios Numéricos:

Resolver los ejercicios de los capítulos 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 17, 18, 21, 22, 23 y 24 del libro Chapra, Steven. Canale, Raymond – Numerical Methods for Engineers.

Problemas de Demostración:

0. Método de Newton/Secante. Sea $f(x)$ una función y $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de puntos. Demuestre que se puede obtener la recurrencia:

$$p_k = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})(p_{k-1} - p_{k-2})}{f(p_{k-1}) - f(p_{k-2})}$$

a partir de:

$$p_k = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})}$$

1. Método de Muller/Horner. Sea $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$ un polinomio de grado n y $Q(x)$ un polinomio de grado $n - 1$. Calcule la primera derivada $P'(x)$ y demuestre que $P'(x_0) = Q(x_0)$. Si $Q(x) = a(x - p_k)^2 + b(x - p_k) + c$. Demuestre que se puede obtener la recurrencia:

$$p_{k+1} = p_k - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

2. Método de Bairstow. Para encontrar raíces complejas de un polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$, se emplean las recurrencias:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + r b_n \\ b_k &= a_k + r b_{k+1} + s b_{k+2} \end{aligned}$$

Demuestre que para encontrar las variaciones Δr y Δs se puede utilizar el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial r} & \frac{\partial b_1}{\partial s} \\ \frac{\partial b_0}{\partial r} & \frac{\partial b_0}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_0 \end{pmatrix}$$

3. Método de Lagrange. Considere 4 puntos x_0, x_1, x_2 y x_3 , Construya el polinomio de interpolación $P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$ con coeficientes de Lagrange L_k y calcule la segunda derivada $P''(x)$.
4. Método de Neville. Considere el conjunto de puntos $S = \{(x_k, f[x_k])\}$ y la ecuación de recurrencia:

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

con valores iniciales $Q_{k,0} = f[x_k]$. Calcule la integral $q(x) = \int Q_{i,j} dx$.

5. Método de Diferencias Divididas/Hermite. Sea $P(x)$ el polinomio de grado n construido por diferencias divididas:

$$P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Obtenga, a partir de $P(x)$, los polinomios de diferencias divididas hacia adelante:

$$P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} \Delta^k f[x_0]$$

y hacia atrás:

$$P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f[x_0]$$

junto con el polinomio de Hermite:

$$H_{2n+1}(z) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \dots, z_k](z - z_0) \dots (z - z_{k-1})$$

6. Método de Ajuste por Mínimos Cuadrados. Regresión Lineal. Considere un conjunto de N mediciones: $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$. Calcule los coeficientes de ajuste lineal a_0 y a_1 óptimos a partir de la suma de diferencias entre valores observados y modelados:

$$S_r = \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

y las derivadas parciales $\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0$ y $\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0$.

7. Método de Ajuste por Mínimos Cuadrados. Regresión No Lineal. Considere que la distribución de datos sigue los modelos no lineales: a) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, b) $y = a_3 e^{\beta x}$. Realice las adecuaciones y/o extensiones a la suma de diferencias cuadráticas del punto anterior y encuentre los valores óptimos de los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 & a_3 .
8. Método de Diferenciación Numérica. Fórmula de 3 Puntos. Considere $N = 3$ pares de puntos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. A partir del polinomio de interpolación de Lagrange con coeficientes $L_k(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k) L_k(x) + \left[\prod_{k=0}^N (x - x_k) \right] \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Demuestre que se pueden obtener las fórmulas de la derivada $f'(x)$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) \quad (\text{punto medio de 3 puntos})$$

y

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi) \quad (\text{extremo de 3 puntos})$$

9. Método de Integración por Cuadratura Numérica. Regla Trapezoidal y Regla de Simpson. Obtenga las fórmulas de cuadratura numérica para evaluar la integral $\int_a^b f(x) dx$ en el intervalo $[a, b]$ a partir de la integración de la aproximación de $f(x)$ mediante el polinomio de interpolación de Lagrange:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^N f(x_k) L_k(x) dx + \int_a^b \left[\prod_{k=0}^N (x - x_k) \right] \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} dx$$

Con $N=2$ puntos, $x_0 = a$, $x_1 = b$ (regla del Trapecio):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

y $N=3$ puntos, $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = b$ (regla de Simpson):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

- 10. Métodos de Integración Numérica Simple y Compuesta. Fórmula de Newton-Cotes.** En general, se puede evaluar una integral mediante la aproximación con $x_0 = a$, $x_N = b$, $x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^N a_k f(x_k)$$

$$a_k = \int_a^b L_k(x)dx$$

Por otra parte, si el intervalo es muy extenso, se puede dividir la integral en M subintervalos, con $x_0 = A$, $x_N = B$, $x_i = A + jH$, $H = \frac{B-A}{M}$:

$$\int_A^B F(x)dx = \sum_{j=1}^{M/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} F(x)dx$$

Diseñe un algoritmo para evaluar una integral dividiendo la integral en M subintervalos y evaluar cada subintervalo mediante integración de Newton-Cotes con $N+1$ puntos.

- 11. Método de Integración Compuesta. Método de Romberg.** Se puede mejorar la aproximación de la integral $\int_a^b f(x)dx$ incorporando extrapolación de Richardson con $(k = 1, 2, \dots, N$ y $j = 2, \dots, k)$:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1} [R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}]$$

Diseñe un algoritmo recursivo para evaluar la aproximación $R_{k,j}$.

- 12. Métodos de Cuadratura Adaptable. Regla de Simpson Adaptable.** Utilizando las reglas de Simpson simple de 3 puntos y compuesta de 5 puntos demuestre que puede evaluar la integral

$$S(a,b) = \int_a^b f(x)dx$$

mediante las dos integrales:

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right]$$

$$S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{h}{6} \left[f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + f(b) \right]$$

con $h = \frac{b-a}{2}$.

- 13. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. Método de Euler.** Considere la ecuación diferencial de 1er orden:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Demuestre que puede resolverse numéricamente, de forma aproximada, empleando N puntos espaciados por $h = \frac{b-a}{N}$, ubicados en $t_i = a + ih$, mediante:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

- 14. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. Método de Runge-Kutta de orden 4.** Desarrollando la serie de Taylor, de dos variables, de cuarto orden para la función $f(t, y)$ demuestre que se puede resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ mediante:

$$w_0 = \alpha$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_i, w_i + k_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

- 15. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales.** Considere el sistema de m ecuaciones diferenciales:

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$\dots$$

$$\frac{du_m}{dx} = f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Para $a \leq t \leq b$ con condiciones iniciales $u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m$. Extienda el Método de Runge-Kutta de 4to orden para encontrar soluciones aproximadas w_j de $u_j(t)$.

- 16. Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. Ecuación Diferencial de Orden Superior.** Muestre que una ecuación diferencial de orden- m

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

Con condiciones iniciales $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$ puede representarse como un sistema de m ecuaciones diferenciales de 1er orden. Tip: Considere: $u_1(a) = y(t), u_2(a) = y'(t), u_m(a) = y^{(m-1)}(t)$.

17. Resolución de Sistemas de Álgebra Lineal. Método de Gauss-Seidel. Demuestre que el sistema de n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

puede resolverse por:

$$x^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i \right]$$

Exprese el sistema de ecuaciones como el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y demuestre que la solución puede escribirse como

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

en donde D es una matriz diagonal, L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior.