



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO**  
**ACADEMIA DE FORMACIÓN BÁSICA**  
**MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA**



Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:**

- - **Lee cuidadosamente** cada pregunta antes de responder.
- - Se permite el uso de calculadoras y notas de clase.
- - **No** se permite el uso de **dispositivos electrónicos** para comunicación o acceso a internet.
- - La información proporcionada debe ser tu propio trabajo. No se permite colaboración entre estudiantes.

**Sección I – Preguntas de opción múltiple. Marca la opción que consideres correcta. (\_\_\_\_\_/30 puntos)**

**1. Una función compleja es analítica si:**

- a) Tiene derivada en al menos un punto.
- b) Tiene derivada únicamente en el eje real.
- c) Satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es diferenciable.
- d) Tiene derivada solo en el eje imaginario.

**2. La continuidad de una función compleja en un punto implica:**

- a) Que su módulo sea cero en ese punto.
- b) Que la función no cambie su valor cerca del punto.
- c) Que exista límite en el punto y coincida con el valor de la función.
- d) Que sea analítica en todo el plano complejo.

**3. ¿Qué indican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos prácticos?**

- a) Condiciones de continuidad.
- b) Condiciones para la analiticidad.
- c) Condiciones para integrar.
- d) Condiciones para derivar parcialmente.

**4. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una función compleja sea analítica en un punto del plano complejo?**

- a) La función debe ser continua en el punto, tener derivadas parciales continuas y cumplir  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  (ecuaciones de Cauchy-Riemann).
- b) Únicamente necesita tener derivadas parciales iguales respecto a x y respecto a y, sin importar continuidad.
- c) Debe cumplir que  $u_x = -v_y, u_y = v_x$ , y tener al menos derivadas parciales de primer orden en el punto.
- d) Debe ser continua en el punto y cumplir únicamente  $u_x = v_x$  y  $u_y = v_y$ .

**5. Considerando todo el plano complejo, indica cuál de las siguientes funciones cumple estrictamente con todas las condiciones para ser analítica en cada punto del plano:**

- a)  $f(z) = \bar{z}$
- b)  $f(z) = z^2 + |z|$
- c)  $f(z) = e^z$
- d)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

ACADEMIA DE FORMACIÓN BÁSICA

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA



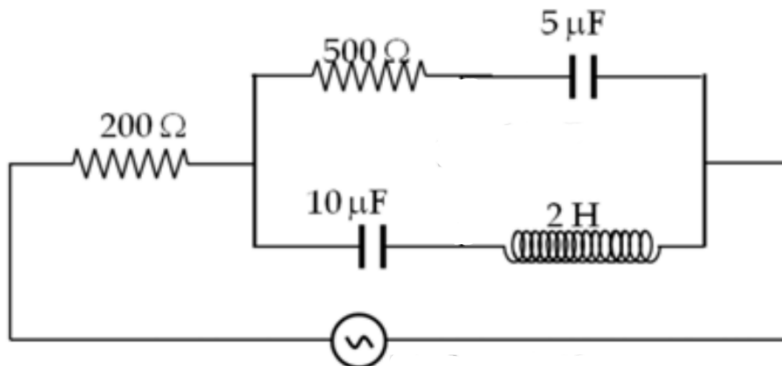
## Sección II – Ejercicios prácticos. Proporciona respuestas claras(\_\_\_\_/30 puntos)

1. Realiza la división de los números complejos ( $z_1 = 18 + 12i$ ) y ( $z_2 = 4 - 2i$ ), y expresa el resultado en forma polar.
2. Reconstruye una función analítica cuya parte real es  $u(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3$ , y cuya parte imaginaria  $v(x, y)$  está relacionada con una función que involucra términos tanto de  $x$  como de  $y$ .
3. Resuelve el límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3z + 2}{z^2 + i}$$

**Sección III: Problemas para Resolver** - Resuelve solo **DOS** problemas mostrando todos los pasos necesarios para llegar a la solución. (\_\_\_\_/ 40 puntos)

1. Calcula todas las raíces sextas del número complejo  $1 + i$ .
2. Encuentra la parte real  $u(x, y)$  de la función compleja analítica. Si  $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5y$
3. Calcule la impedancia total del circuito ( $Z_T$ ), la corriente total ( $I_T$ ) y el Voltaje en el Inductor ( $V_L$ ). Toma en cuenta que el Voltaje en el circuito es de  $220 \angle -60^\circ \text{ V}$  y  $f = 60 \text{ Hz}$





**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO**  
**ACADEMIA DE FORMACIÓN BÁSICA**  
**MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA**



Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:**

- - **Lee cuidadosamente** cada pregunta antes de responder.
- - Se permite el uso de calculadoras y notas de clase.
- - **No** se permite el uso de **dispositivos electrónicos** para comunicación o acceso a internet.
- - La información proporcionada debe ser tu propio trabajo. No se permite colaboración entre estudiantes.

**Sección I – Preguntas de opción múltiple. Marca la opción que consideres correcta.** (\_\_\_\_\_/30 puntos)

1. ¿Qué condición es necesaria para aplicar el teorema de Cauchy-Goursat?

- a) El contorno debe ser abierto
- b) La función debe tener polos en el dominio
- c) La función debe ser analítica en un dominio simplemente conexo
- d) La función debe ser real en el contorno.

2. ¿Qué característica distingue a la serie de Laurent respecto a la de Taylor?

- a) Incluye senos y cosenos
- b) Solo aplica a funciones periódicas
- c) Puede incluir potencias negativas de  $z$
- d) Se usa únicamente en el eje real

3. ¿Cuál es el coeficiente de  $\frac{1}{z-z_0}$ , en la serie de Laurent de una función?

- a) La derivada de la función en  $z_0$
- b) El valor promedio sobre el círculo
- c) El residuo de la función en  $z_0$
- d) El módulo de la función en  $z_0$

4. Si  $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$  ¿cuáles son sus polos??

- a)  $z = \pm 2i$ , polos simples
- b)  $z = \pm 2$ , polos dobles
- c)  $z = 0,4$ , polos de orden 2
- d) No tiene polos, es analítica

5. ¿Cuál es el valor de la integral  $\int_C \frac{1}{z-a} dz$  si  $C$  es un círculo que encierra a  $a$ ?

- a) 0
- b)  $2\pi i$
- c)  $a$
- d)  $\pi i$

**Sección II – Ejercicios prácticos. Proporciona respuestas claras**(\_\_\_\_\_/30 puntos)

1. Evalúa la siguiente integral real utilizando el método de residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx$$



2. Calcula la siguiente integral compleja. Donde  $C$  es el círculo  $|z| = 2$  orientado en sentido antihorario.

$$\int_C \frac{z^2 + 2}{z^2 + 1} dz$$

**Sección III: Problemas para Resolver** - Resuelve solo DOS problemas mostrando todos los pasos necesarios para llegar a la solución. (\_\_\_\_/ 40 puntos)

1. Evalúa la integral, donde  $C$  es el círculo  $|z| = 2$ , orientado en sentido antihorario

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{z^2(z - 3)} dz$$

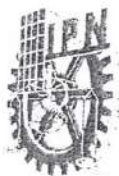
2. Determina el residuo de la función

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$$

en el punto  $z = 0$ , y **clasifica** la singularidad en ese punto.

3. Evalúa la siguiente integral utilizando el teorema del residuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 1} dx$$



IGNACIO RÍO DEL TORRE.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS - PRIMER EXAMEN



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

① ENCONTRAR LAS RAÍCES O CEROS DE:

$$z^5 + 16z - z^4 - 16 = 0.$$

② PRUEBE QUE  $u = u(x, y)$  ES ARMÓNICA Y HALLE  $v = v(x, y)$  ARMÓNICA CONJUGADA SI  $u = u(x, y) = 2x(1 - y)$ .

EXPRESAR EL RESULTADO FINAL  $f(z)$  EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE  $z$ .

③ REPRESENTAR GEOMÉTRICAMENTE.

$$\left| z + \sqrt{2} e^{i\pi/4} \right| = 2.$$

④ EN QUE SE TRANSFORMA LA CURVA  $|z| = 1$ . AL APLICAR LA FUNCIÓN  $w = \frac{z}{1+z}$ .

⑤ DETERMINAR EL VALOR DE  $a$  Y  $b$  PARA QUE SE CUMPLA QUE:

$$\frac{a+2i}{b+3i} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

JGACIO (No) DE LATORRE,



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS – PRIMER EXAMEN



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

① HALLAR LAS RAÍCES O CEROS DE LA ECUACIÓN.

$$z^3 + (1+i)z^2 + (1+i)z + i = 0.$$

② PROBAR QUE  $u = u(x, y) = \cosh x \cos y$  ES ARMÓNICA, ENTONCES DETERMINE SU FUNCIÓN ARMÓNICA CONJUGADA. EXPRESAR  $f(z)$  EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE  $z$ .

③ DETERMINAR EL VALOR DE  $a$  Y  $b$  PARA QUE SE CUMPLA QUE:

$$\frac{a+2i}{b+3i} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

④ REPRESENTAR GEOMÉTRICAMENTE.

$$\left| z - \sqrt{2} e^{i\pi/4} \right| = 2.$$

⑤ HALLE LA IMAGEN DE  $x^2 + y^2 = 1$  BAJO EL MAPEO

$$w = (i + \sqrt{3})z + i - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ Y REPRESENTAR EL}$$

MAPEO GRÁFICAMENTE.





Ignacio Ríos de la Torre.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

MATEMÁTICAS AVANZADAS - SEGUNDO EXAMEN



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

- ① EVALUAR LA INTEGRAL UTILIZANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO DE VARIABLES COMPLEJAS.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

- ② APLICAR EL FENÓMENO DE GIBBS A LA SEÑAL:

$$f(t) =$$

- ③ DETERMINAR LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA O EXPONENCIAL PARA LA SEÑAL:

$$f(t) = \frac{3}{4}t, \quad 0 < t < 8 \quad \text{si } T = 8.$$

- ④ CONSIDERE LA SEÑAL  $f(t) = \cos t$ ,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ .

ENCONTRAR LA SERIE DE FOURIER EN COSENO.

- ⑤ CONVERTIR LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA O EXPONENCIAL A SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

PARA:  $C_0 = \frac{2A}{\pi}$ ;  $C_n = -\frac{2A}{\pi(4n^2 - 1)}$  si  $\omega_0 = 2\pi$ .



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
MATEMÁTICAS AVANZADAS – SEGUNDO EXAMEN



Nombre del alumno: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

- ① EVALÚE LA INTEGRAL UTILIZANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO DE VARIABLE COMPLEJA.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

- ② APLICAR EL FENÓMENO DE GIBBS PARA LA SEÑAL:  
 $f(t) =$

- ③ HALLE LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA O EXPONENCIAL PARA LA SEÑAL:

$$f(t) = 2t, 0 \leq t < 3 \text{ con } T = 3.$$

- ④ SEA LA SEÑAL  $f(t) = 5 \cos 5t, 0 \leq t < \pi$ . DETERMINE LA SERIE DE FOURIER EN SENOS.

- ⑤ CONVERTIR LA SERIE DE FOURIER COMPLEJA A SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA PARA:

$$C_0 = \frac{2A}{\pi} ; C_n = -\frac{2A}{\pi(4n^2-1)} \text{ con } \omega_0 = 2\pi.$$



Nombre de la alumn@:

**Instrucciones:** Resuelva únicamente 4 de los siguientes problemas. Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. El examen tiene una ponderación del 70 % de la calificación del parcial.

1. Pruebe que si  $z$  y  $w$  son números complejos cualesquiera, entonces

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

2. Sea  $n$  un entero positivo, y  $\omega = e^{2\pi i/n}$ . Evalúe  $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \omega^j$ .

3. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que

a)  $\sinh^{-1} z = \log \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$

b) Utilice la ecuación anterior para determinar al menos un valor de  $w$ , tal que,  $\sinh w = i$ .

4. Determine la derivada de  $f(z) = \sinh^{-1} z$  en cualquiera de sus ramas analíticas.

5. Sea  $f(z) = e^{-z} + \bar{z}$ ,

a) escriba  $f(z)$  en la forma  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.

Nombre de la alumn@:

**Instrucciones:** Resuelva únicamente 4 de los siguientes problemas. Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. El examen tiene una ponderación del 70 % de la calificación del parcial.

1. Sean  $z$  y  $w$  números complejos tales que  $\bar{z}w \neq 1$ , pero tales que  $z$  o  $w$  tienen magnitud 1. Pruebe que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| = 1.$$

2. Sea  $n$  un entero positivo y sean  $u_1, u_2, \dots, u_n$  las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Pruebe que  $\sum_{j=1}^n u_j = 0$ .  
Sugerencia: Escriba cada  $u_j$  como una potencia de  $e^{2\pi i/n}$ .

3. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que

a)  $\cos^{-1} z = -i \log \left( z + i(1 - z^2)^{1/2} \right),$

b) Utilice la ecuación anterior para determinar al menos un valor de  $w$ , tal que,  $\cos w = i$ .

4. Determine la derivada de  $f(z) = \arccos z$  en cualquiera de sus ramas analíticas.

5. Sea  $f(z) = e^{-z} + \bar{z}$ ,

a) escriba  $f(z)$  en la forma  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.

*Matemáticas avanzadas para la ingeniería*  
*Tercer examen parcial*  
*Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián*  
*2CM12*  
*23 de noviembre de 2022*

Nombre de la alumn@:

**Instrucciones:** Resuelva cada uno de los siguientes problemas. Cada problema tiene un valor de 2.5 puntos. El examen tiene una ponderación del 70 % de la calificación del parcial.

1. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin(\theta)) d\theta.$$

*Sugerencia:* Considere  $\oint_{\Gamma} (\frac{e^z}{z}) dz$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia unitaria alrededor del origen. Evalúe esta integral una vez usando la integral de Cauchy, después otra vez directamente usando las funciones coordenadas para  $\Gamma$ .

2. Use la forma extendida del teorema de la deformación para evaluar

$$\oint_{\Gamma} \frac{z - 4i}{z^3 + z} dz,$$

donde  $\Gamma$  es una trayectoria cerrada que encierra al origen,  $i$  y  $-i$ .

3. Encuentre la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{2 + z}$$

alrededor de  $z_0 = 1 - 8i$ .

4. Encuentre la serie de Maclaurin de la función

$$f(z) = e^z - i \cos(z).$$

*Matemáticas avanzadas para la ingeniería*  
*Segundo examen parcial*  
*Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián*  
*2CM12*  
*8 de enero de 2023*

Nombre de la alumn@:

**Instrucciones:** *Resuelva los siguientes problemas. El examen tiene una ponderación del 70 % de la calificación del parcial.*

1. Para la señal periódica  $f(t) = |A \sin(\omega_0 t)|$  hallar,
  - La serie de Fourier trigonométrica (5 puntos).
  - La forma armónica de la serie de Fourier (3 puntos).
  - La forma compleja de la serie de Fourier (2 puntos).

La gráfica de la función  $f(t)$  se muestra en la figura 1.

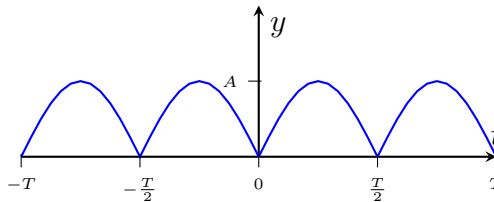


Figura 1

*Matemáticas avanzadas para la ingeniería*  
*Examen extraordinario*  
*Profesor: Ricardo Ceballos Sebastián*  
*23 de enero de 2023*

**Instrucciones:** Resuelva, de la manera más clara posible, 4 de los siguientes ejercicios. Cada ejercicio vale 2.5 puntos.

1. Sea  $f(z) = e^{-z} + iz^2$ ,
  - a) Escriba  $f(z)$  en la forma  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
  - b) Mediante las condiciones de diferenciabilidad, determine el dominio de analiticidad.
2. Demuestre, a partir de las definiciones básicas, que
  - a)  $\cos^{-1} z = -i \log \left( z + i\sqrt{1 - z^2} \right)$ ,
  - b) Utilice la ecuación anterior para determinar al menos un valor de  $w$ , tal que,

$$\cos w = 2 - i$$

3. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin(\theta)) d\theta.$$

*Sugerencia:* Considere  $\oint_{\Gamma} \left( \frac{e^z}{z} \right) dz$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia unitaria alrededor del origen. Evalúe esta integral una vez usando la integral de Cauchy, después otra vez directamente usando las funciones coordenadas para  $\Gamma$ .

4. Use la forma extendida del teorema de la deformación para evaluar

$$\oint_{\Gamma} \frac{z - 4i}{z^3 + z} dz,$$

donde  $\Gamma$  es una trayectoria cerrada que encierra al origen,  $i$  y  $-i$ .

5. Encontrar la serie de Fourier para la función  $f(t)$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

y  $f(t + 2n\pi) = f(t)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  (ver figura 1).

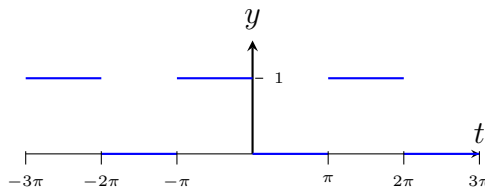


Figura 1:

EXAMENES DE MATEMÁTICAS AVANZADAS 23-1  
J M N

Primer examen

1. Calcular todos los valores de la raíz cuarta de  $w = -2 + i 2\sqrt{3}$
2. Deducir la fórmula del  $\arccos(z)$  y aplicarla para obtener la parte real e imaginaria de  $\arccos(2i)$
3. Separar la parte real e imaginaria de  $(1 - i)^{1+i}$
4. Mostrar que en el dominio  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , la función  $w = \ln(z)$  es analítica, mostrar la derivada

Segundo examen

Instrucciones: Resolver 5 de las siguientes integrales con métodos de variable compleja  
Dibuje los puntos singulares y la curva de integración en todos los casos

- a.  $\int_{1-i}^{-1+i} (z\bar{z}) dz = 4(-1 + i)$
- b.  $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}(iz)}{z^2 - 4z + 3} dz = \pi \operatorname{senh}(1)$
- c.  $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi}{2} (\cos(1) - \operatorname{sen}(1) + i(\cos(1) + \operatorname{sen}(1)))$
- d.  $\oint_{|z|=1} (z^3 + 2z^2) e^{\frac{1}{z}} i dz = -2\pi \left( \frac{1}{4!} + \frac{2}{3!} \right)$
- e.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}$
- f.  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(\theta)} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Tercer examen

1. Calcular la serie de Fourier y verificar la fórmula de Parseval para la función  $f(t) = |\cos(t)|$
2. Calcular la transformada de Fourier y verificar la fórmula de Parseval para

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < |t| \end{cases}$$

3. Resolver la ecuación diferencial  $y'' + (a+b)y' + (ab)y = \delta(x - (a-b))$  mediante transformada de Fourier, elija  $|a| > |b| > 2$



**Primer parcial de Avanzadas****Nombre del Alumno:** \_\_\_\_\_

1.(20 pts) Muestre que:

a)

$$|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5| \quad (1)$$

b)

$$\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i \quad (2)$$

2. (20 pts) Calcule todas las raíces en forma cartesiana, representelas geométricamente e indique cual es la raíz principal.

$$z = (-16)^{1/4} \quad (3)$$

3. (20 pts) Muestre si la siguiente función es o no analítica

$$f(z) = e^y e^{ix} \quad (4)$$

4. (20 pts) Hallar todas la raíces de la ecuación  $\sin z = \cosh 4$ , igualando partes reales e imaginarias y utilizando el inverso de la función  $\sin z$ .

5. (20 pts) Hallar todos los valores de:

$$\tan^{-1}(2i) \quad (5)$$

**Segundo parcial de Avanzadas****Nombre del Alumno:** \_\_\_\_\_

1. (20 pts) En cuente el valor de  
a)

$$\int_C f(z) dz \quad (1)$$

donde:

$$f(z) = \frac{(z+2)}{z} \quad (2)$$

y  $C$  es el contorno:

$$z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (3)$$

2. (20 pts) Hallar el dominio de analiticidad de la función  $f$ , y aplicar el teorema de CAuchy-Goursat para probar que

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (4)$$

cuando el contorno simple cerrado  $C$  es el círculo  $|z| = 1$  y cuando

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \quad (5)$$

3. (20 pts) Denotemos por  $C$  la frontera de cuadrado cuyo lados están sobre las rectas  $x = \pm 2$  y  $y = \pm 2$ , donde  $C$  se recorre en sentido positivo. Calcular:

$$\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz \quad (-2 < x_0 < 2); \quad (6)$$

4. (20 pts) Encuentre la serie de potencias para  $\sinh z$ , alrededor de  $z_0 = i$  y encuentre el radio de convergencia.

5. (20 pts) por el método del teorema de los residuos calcule la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} dx \quad (7)$$

### Tercer parcial de Avanzadas

Nombre del Alumno: \_\_\_\_\_

1. (33 pts) Encuentre la integral de Fourier compleja de  $f(x)$  .

$$f(x) = e^{-|\frac{x}{2}|} \quad (1)$$

Con estos resultados determine la transformada de Fourier de  $f(x)$ .

2. (33 pts) Encuentre la serie de Fourier de:

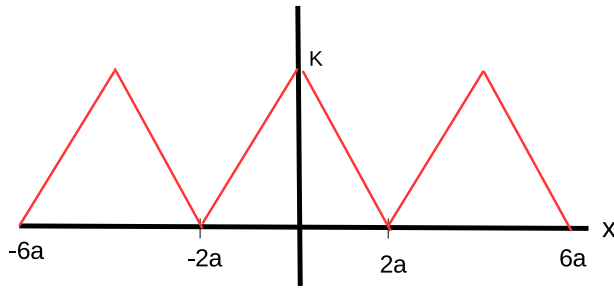


Fig. 1:

3. (33 pts) Sea  $f(t) = H(t)e^{-at}$ , dode  $H(t)$  es la función de Heaviside, y sea  $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$ , considere también que por el teorema del desplazamiento en el tiempo:  $\hat{f}^{-1}[e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega)](t) = f(t - t_0)$ . Con la ayuda de esta información demuestre que la transformada inversa de Fourier de  $\hat{g}(\omega) = \frac{e^{t_0 i\omega}}{a+i\omega} = H(t + t_0)e^{-a(t+t_0)}$  Con este resultado encuentre la transformada inversa de:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{e^{(2\omega-6)i}}{5 - (3 - \omega)i} \quad (2)$$

considerando que el teorema del desplazamiento de la frecuencia nos dice que  $\hat{f}^{-1}(\hat{f}(\omega - \omega_0)) = e^{i\omega_0 t} f(t)$

**Examen ETS de Matemáticas Avanzadas 2020/2 (VESPERTINO)**

Miércoles 10 de Febrero de 2021

**Nombre del Alumno:** \_\_\_\_\_**frase clave (1)** \_\_\_\_\_**frase clave (2)** \_\_\_\_\_

*En todos los problemas propuestos dejará por escrito la prueba de sus cálculos, se recomienda utilizar el papel suficiente para la redacción de los mismos, ya que una mala redacción pudiera llevarle a una mala evaluación de sus resultados, es obligatorio escribir con pluma de tinta azul o negra. Está prohibido utilizar cualquier tipo de dispositivo electrónico incluyendo calculadora en la resolución de estos problemas. También debe poner su nombre y firma en cada una de las hojas. Nota: Los problemas del uno al tres son obligatorios, responda únicamente los problemas correspondientes a 100 puntos, si elige responder los seis problemas, se le anulará el último (6).*

1. (20 pts) Encuentre la integral de Fourier compleja de  $f(x)$  .

$$f(x) = e^{-|\frac{x}{2}|} \quad (1)$$

Con estos resultados determine la transformada de Fourier de  $f(x)$ .

2. (20 pts) Encuentre la serie de Fourier de:

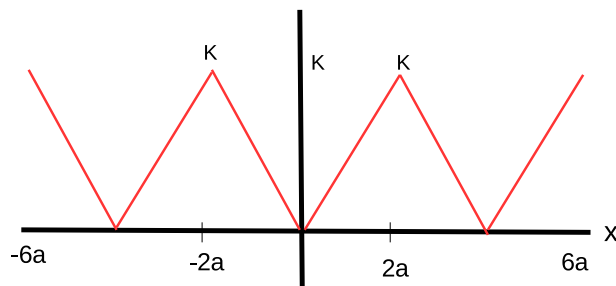


Fig. 1:

3. (20 pts) Mediante el teorema de los residuos encuentre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4x + 6} dx \quad . \quad (2)$$

4. (20 pts) Calcule :

$$(-i)^{(1-i)} = \quad (3)$$

5. (20 pts) Encuentre una serie de potencias para  $f(z) = 1/z^2$  alrededor de  $z_0 = i$  e indique el radio de convergencia.

6. (20 pts) A partir de la función  $f(z) = \cosh(z)$  encuentre su inversa ( $\cosh^{-1}(z)$ ), y con este resultado calcule  $\cosh^{-1}(-i)$ .