



## 1. Descripción de procesos estocásticos

- Supongamos que las variables  $X, Y$  pueden tomar los valores  $(0, 0)$ ;  $(1, 1)$ ;  $(-1, 1)$ ;  $(1, -1)$  y  $(-1, -1)$ , cada uno con probabilidad  $1/5$ . Determine lo siguiente.
  - Muestre la tabla con la función de probabilidad conjunta.
  - Calcule las funciones marginales de probabilidad,  $f_1(-1)$ ,  $f_1(0)$ ,  $f_2(-1)$ ,  $f_2(0)$ .
  - La probabilidad  $P(X = 0, Y = -1)$
  - La probabilidad condicional  $P(X = 0|Y = -1)$
- En dos lugares de una habitación se mide la intensidad del ruido. Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias que representan la intensidad del ruido en estos puntos y supongamos que la función de densidad conjunta está dada por la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) & \text{si } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Calcular las densidad marginales de  $X$  e  $Y$ .
  - Calcular la probabilidad  $P(x \leq 1, Y \leq 1)$ .
- Considere dos variables aleatorias discretas  $X$  e  $Y$  con función de probabilidad conjunta dada por la siguiente tabla, donde  $h = 1/60$ .

$Y \setminus X$	0	1	2
0	$h$	$2h$	$3h$
1	$2h$	$4h$	$6h$
2	$3h$	$6h$	$9h$
3	$4h$	$8h$	$12h$

Calcule

- La probabilidad  $P(X = 2, Y = 3)$
- Las Funciones marginales de probabilidad  $f_2(1)$ ,  $f_2(2)$ ,  $f_2(3)$
- La probabilidad condicional  $P(X = 2|Y = 3)$

4. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias continuas, donde  $X$  mide la altura en  $cm$  y  $Y$  el peso en  $kg$  de una muestra de individuos. Si  $(X, Y)$  tiene función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{si } 150 \leq x \leq 200, 50 \leq y \leq 100, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Calcular

- La Función marginal de probabilidad  $f_2(y)$
- La probabilidad condicional  $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$
- Calcular la probabilidad condicional de que la altura esté entre 160 y 170  $cm$  dado que el peso es 70. Use que

$$P(160 \leq X \leq 170|Y = 70) = \int_{160}^{170} f(x|70)dx$$

5. En una gasolinera hay islas de autoservicio y de servicio completo. En cada isla hay una sola bomba de gasolina sin plomo, con dos mangueras. Representamos con  $X$  el número de mangueras empleadas en la isla de autoservicio en una hora en particular y con  $Y$  el número de mangueras en uso, en ese momento, en la isla de servicio completo. La función de probabilidad conjunta de  $X$  y  $Y$  aparece en la siguiente tabla:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0,1	0,08	0,06
1	0,04	0,2	0,14
2	0,02	0,06	0,3

- ¿Cuál es  $P(X = 1, Y = 1)$ ?
  - Calcule la probabilidad  $P(X \leq 1, Y \leq 1)$ .
  - Describa con palabras el evento  $\{X \neq 0 \text{ y } Y \neq 0\}$  y calcule la probabilidad de este evento.
  - Calcule las funciones de probabilidad marginales de  $X$  y de  $Y$ .
  - ¿Son  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes?
6. La probabilidad conjunta del número  $X$  de automóviles y el número  $Y$  de autobuses, por ciclo de señal en un carril propuesto de vuelta a la izquierda, aparece en la siguiente tabla de probabilidad conjunta

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5
0	0,025	0,050	0,025	0,150	0,100	0,050
1	0,015	0,030	0,075	0,090	0,060	0,030
2	0,010	0,020	0,050	0,060	0,040	0,020

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un automóvil y un autobús durante un ciclo?

- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya a lo sumo un automóvil y un autobús durante un ciclo?
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un automóvil durante un ciclo? ¿Exactamente un autobús?
  - d) Suponga que el carril de vuelta a la izquierda tendrá capacidad para que transiten cinco automóviles, y un autobús equivale a tres automóviles. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sobrecarga durante un ciclo?
  - e) ¿Son  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes. Explique.
7. Cada neumático de un tipo particular de automóvil se llenará a una presión de  $26 \text{ lb/pulg}^2$ . Suponga que la presión de aire de cada neumático es una variable aleatoria,  $X$  para el neumático derecho y  $Y$  para el neumático izquierdo con probabilidad de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2 + y^2) & \text{si } 20 \leq x \leq 30, 20 \leq y \leq 30, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es el valor de  $K$ ?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos neumáticos tengan menor presión que la requerida?
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia de presión de aire entre los neumáticos sea a lo sumo de  $2 \text{ lb/pulg}^2$ .
  - d) Determine la función marginal de densidad de presión de aire del neumático derecho.
  - e) ¿Son  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes?
8. Dos componentes de una microcomputadora tienen la siguiente función de densidad conjunta para sus duraciones  $X$  y  $Y$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración  $X$  del primer componente sea mayor de 3?
- b) ¿Cuáles son las funciones marginales de  $X$  y de  $Y$ ?
- c) ¿Son independientes las dos duraciones? Explique.
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de por lo menos un componente sea mayor de 3?

## 2. Caminatas aleatorias y movimiento Browniano

1. Dado que la probabilidad de que el jugador A se arruine es:

$$u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \quad \text{si } p \neq q,$$

o bien:

$$u_k = \frac{N - k}{N} \quad \text{si } p = q = \frac{1}{2},$$

responde las siguientes preguntas:

- Calcula la probabilidad de que el jugador A se arruine para diferentes valores de  $k$  (capital inicial) y  $N$  (capital total) si  $p = \frac{1}{3}$  y  $q = \frac{2}{3}$ .
- Graficar  $u_k$  como función de  $k$  para diferentes valores de  $p$  y con  $N = 50$
- ¿Cómo es la probabilidad  $u_k$  para valores de  $p$  cercanos a  $1/2$ ?
- ¿Qué sucede con la probabilidad de ruina si  $k = N/2$ ? ¿Cómo cambia si  $k$  aumenta o disminuye?
- Si  $p = q = \frac{1}{2}$ , ¿Cómo varía la probabilidad de ruina cuando  $k$  aumenta de 1 a  $N - 1$ ? ¿Es más fácil que el jugador se arruine cuando empieza con poco capital?

2. La duración promedio del juego está dada por:

$$m_k = \frac{1}{q - p} \left( k - N \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \quad \text{si } p \neq q,$$

o bien:

$$m_k = k(N - k) \quad \text{si } p = q = \frac{1}{2}.$$

Realiza los siguientes cálculos:

- Calcula la duración promedio del juego cuando  $p = \frac{1}{4}$  y  $q = \frac{3}{4}$ , para  $k = 5$  y  $N = 10$ . Compara esto con la duración promedio cuando  $p = q = \frac{1}{2}$ .
- ¿Cómo cambia la duración promedio del juego si el juego se vuelve menos justo, es decir, si  $p = 0,1$  y  $q = 0,9$ ? ¿Qué observas en comparación con el caso  $p = q = \frac{1}{2}$ ?

- c) ¿Qué sucede con la duración promedio si ambos jugadores tienen el mismo capital al inicio ( $k = N/2$ )? ¿Es este el escenario en el que el juego dura más?
3. Imagina ahora que el jugador A está dispuesto a realizar apuestas sucesivas hasta que gane o se arruine. Considera la duración del juego cuando gana una apuesta pero continúa jugando hasta perder todo.
- Si  $p = \frac{2}{3}$  y  $q = \frac{1}{3}$ , calcula cuántas apuestas en promedio hará el jugador A si comienza con  $k = 1$  y  $N = 5$ .
  - ¿Cómo debe ser el capital inicial de los jugadores para que la duración del juego sea máxima?
  - Analiza cómo cambia el número de apuestas en promedio si el jugador tiene una mayor ventaja, es decir, si  $p = 0,8$  y  $q = 0,2$ .
  - ¿Qué sucede si el jugador sigue jugando indefinidamente en un escenario de juego justo  $p = q = \frac{1}{2}$ ? ¿Aumenta el número de apuestas en promedio?
  - Para  $N = 50$  y  $p = \frac{1}{2}$ , ¿Cuál es la duración máxima promedio del juego?
4. Supón que ahora el jugador A puede apostar dos unidades en lugar de una en cada jugada.
- ¿Como cambiaria la fórmula de la probabilidad de ruina si las apuestas son de dos unidades? ¿Qué tan probable es que el jugador se arruine más rápido comparado con las apuestas de una unidad?
  - Calcula la probabilidad de arruinarse cuando  $p = 0,6$ ,  $q = 0,4$ , y el jugador A apuesta dos unidades en cada jugada. ¿Es más fácil o más difícil que se arruine en este escenario?
5. Considera el problema desde la perspectiva del jugador B, que tiene  $N - k$  unidades al inicio.
- ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador B se arruine si  $p = \frac{1}{3}$  y  $q = \frac{2}{3}$ , empezando con  $N - k = 3$  unidades, y  $N = 10$ ?
  - Verifica que la suma de las probabilidades de ruina de ambos jugadores  $u_k$  y  $v_{N-k}$  siempre es igual a 1, es decir, que uno de los dos jugadores siempre se arruinará.
6. Considera que ahora puede haber empates en el juego, es decir, existe una probabilidad  $r$  de que no haya cambio en el capital de ninguno de los jugadores en cada apuesta, donde  $p + q + r = 1$ .
- Demuestra que la probabilidad de ruina para el jugador A sigue siendo la misma fórmula que antes, independientemente de los empates.

b) ¿Cómo afecta la duración promedio del juego el hecho de que pueda haber empates en cada apuesta?

7. Simula una caminata aleatoria unidimensional de  $N = 1000$  pasos, donde en cada paso  $X_t$  puede aumentar o disminuir en  $\pm 1$  con igual probabilidad:

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X, \quad \Delta X \in \{-1, 1\}.$$

- a) Grafica la trayectoria  $X_t$  en función del tiempo  $t$ .  
b) Calcula y grafica el desplazamiento cuadrático medio:

$$\langle X_t^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^2,$$

y verifica que escala linealmente con  $t$ .

8. Genera un movimiento browniano en tiempo continuo para  $t \in [0, 1]$  usando el esquema:

$$X_t = \sqrt{2D}W_t,$$

donde  $W_t$  es un proceso de Wiener y  $D$  es la difusividad. Usa un paso temporal  $\Delta t = 0,01$ .

- a) Grafica una trayectoria  $X_t$ .  
b) Calcula el desplazamiento cuadrático medio  $\langle X_t^2 \rangle$  y verifica su relación con el tiempo  $t$ .

9. Extiende el movimiento browniano al caso bidimensional:

$$\vec{X}_t = \sqrt{2D}\vec{W}_t,$$

donde  $\vec{W}_t$  es un vector de procesos de Wiener independientes.

- a) Grafica la trayectoria en el plano  $(X_t, Y_t)$ .  
b) Calcula el desplazamiento radial medio:

$$R_t^2 = X_t^2 + Y_t^2,$$

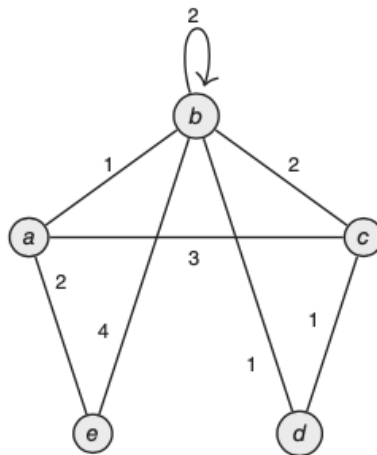
y verifica que escala linealmente con  $t$ .

10. Simula una caminata aleatoria con un paso discreto  $\Delta t = 1/N$  y pasos individuales  $\Delta X \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ . Muestra numéricamente que las trayectorias convergen al movimiento browniano cuando  $N \rightarrow \infty$ .

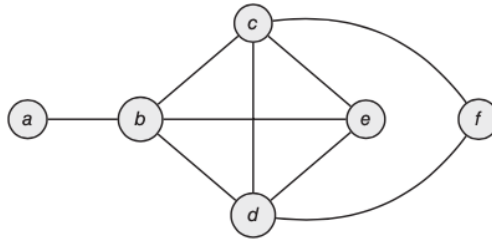
- a) Grafica trayectorias para  $N = 10, 100, 1000$ .  
b) Calcula el desplazamiento cuadrático medio  $\langle X_t^2 \rangle$  para cada  $N$  y verifica que coincide con la teoría en el límite continuo

### 3. Cadenas de Markov

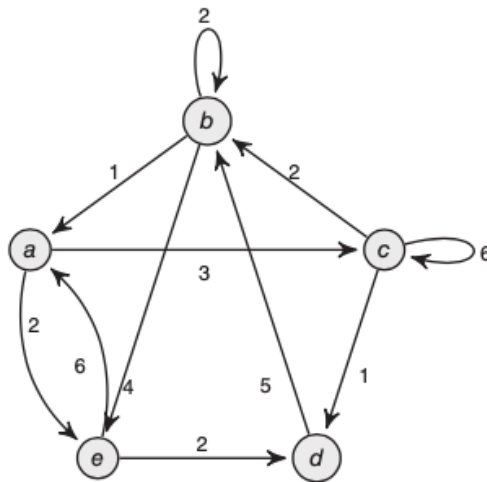
- a) Considera una caminata aleatoria sobre los nodos  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$  donde la probabilidad de moverse a la izquierda es  $q$  y la de moverse a la derecha es  $p$ , donde  $p + q = 1$ . Si el caminante está en cero, en el siguiente paso transiciona necesariamente a 1, si el caminante está en  $k$ , en el siguiente paso transiciona a  $k - 1$ . Esta caminata se llama caminata aleatoria con limites reflectantes. Suponga que  $k = 3$ ,  $q = 1/4$ ,  $p = 3/4$  y que la distribución inicial es uniforme.
- 1) Escriba la matriz de transición.
  - 2) Encuentre  $p(X_7 = 1 \mid X_0 = 3, X_2 = 2, X_4 = 2)$ .
  - 3) Encuentre  $P(X_3 = 1, X_5 = 3)$ .
- b) Muestre para dos matrices estocásticas de la tarea anterior que el valor  $\lambda = 1$  es un valor propio de cada una de las matrices y encuentre el eigenvector asociado a dicho valor propio. Después demuestre el caso general: si  $P$  es una matriz estocástica de tamaño  $n \times n$  entonces  $\lambda = 1$  siempre es un valor propio de la matriz.
- c) Considere el siguiente grafo



- 1) Muestre que la matriz de transición es doblemente estocástica.
  - 2) Itere repetidamente las potencias de la matriz estocástica para mostrar que si  $\alpha$  es una distribución inicial uniforme, entonces la distribución de  $X_n$  es uniforme también.
- d) Considere una caminata aleatoria sobre el siguiente grafo

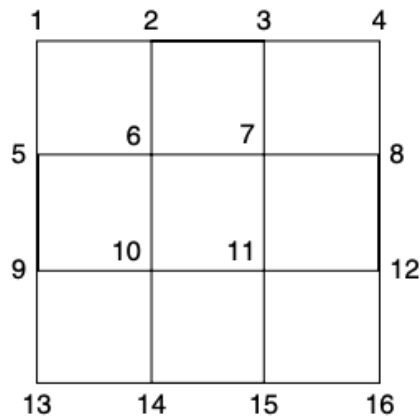


- 1) Muestre la matriz de transición asociada a la cadena de Markov.
  - 2) Use su archivo de potencia de matrices, para simular 50 pasos.
  - 3) Repita la simulación 10 veces y vea cuáles de ellas terminan en el vértice  $c$ .
  - 4) ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que un caminante visite el vértice  $c$  si se considera la distribución inicial uniforme?
- e) Para el siguiente grafo, escriba



- 1) La matriz de transición asociada
  - 2) Calcule  $P(X_5 = 3 | X_0 = 1)$
  - 3) Calcule  $P(X_6 = 3 | X_0 = 2)$
  - 4) Calcule  $P(x_2 = 1, x_1 = 0 = 2)$  si un caminante empieza en el vértice 5.
  - 5) ¿Cuál es la distribución a largo plazo si un caminante empieza en el vértice 3? ¿Y si empieza en el vértice 2?
- f) Para el siguiente grafo, escriba





- 1) La matriz de transición asociada
  - 2) Calcule  $P(X_{10} = 10 | X_0 = 1)$
  - 3) Calcule  $P(X_2 = 7 | X_0 = 16)$
  - 4) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al caminante en el vértice 11 si la caminata aleatoria comienza en el vértice 4?
  - 5) ¿Cuál es la distribución a largo plazo si se sabe que el caminante tiene la misma probabilidad de empezar la caminata en los vértices 1, 6, 11 y 16?
11. Sea  $\{X_0, X_1, \dots\}$  una cadena de Markov con la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y distribución inicial  $\alpha = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ . Encuentre lo siguiente:

- (a)  $P(X_2 = 1 | X_1 = 3)$
  - (b)  $P(X_1 = 3, X_2 = 1)$
  - (c)  $P(X_2 = 3)$
  - (d)  $P(X_9 = 1 | X_1 = 3, X_4 = 1, X_7 = 2)$
12. Sea  $\{X_0, X_1, \dots\}$  una cadena de Markov con la matriz de transición  $P$ . Sea  $Y_n = X_{3n}$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Muestra que  $Y_0, Y_1, \dots$  es una cadena de Markov y exhibe su matriz de transición.
13. Sea  $P$  la matriz de transición de una cadena de Markov con  $k$  estados, e  $I$  la matriz identidad  $k \times k$ . Considere la matriz:

$$Q = (1 - p)I + pP, \quad \text{para } 0 < p < 1.$$

Demuestre que  $Q$  es una matriz estocástica. Dé una interpretación probabilística de las dinámicas de una cadena de Markov gobernada por la matriz  $Q$  en términos de la cadena de Markov original.

14. Considere una caminata aleatoria sobre un grafo ciclico de 5 vértices etiquetados por 1, 2, 3, 4, 5. Si un caminante empieza en el vértice 1,
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que visite un vértice vecino después de 3 pasos?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que visite un vértice no vecino después de 3 pasos?
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que se mueva del vértice 2 al vértice 5 en dos pasos.