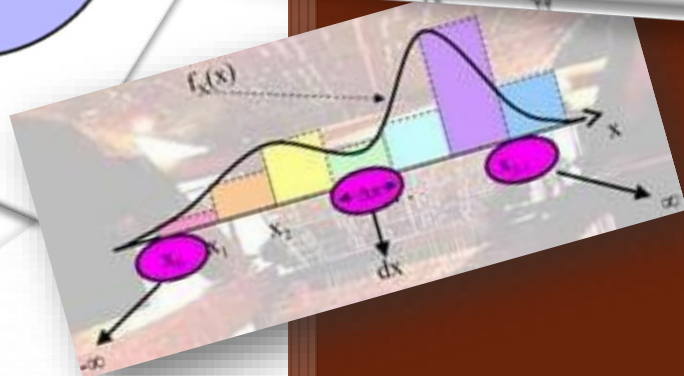
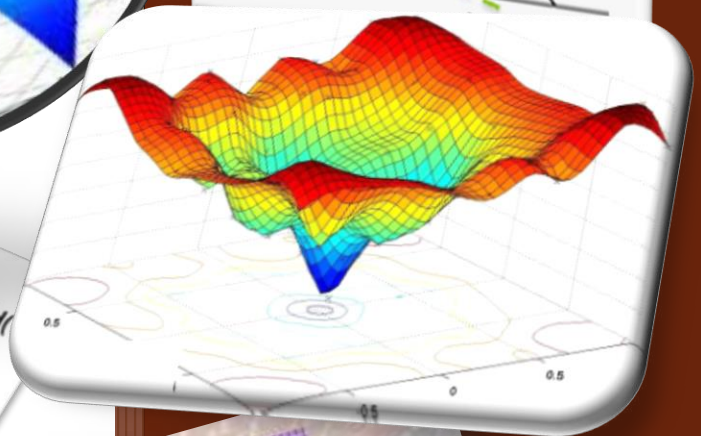
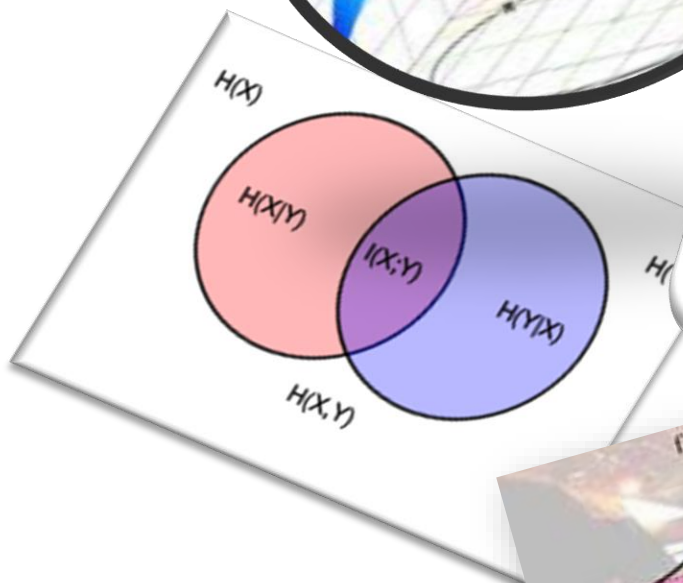
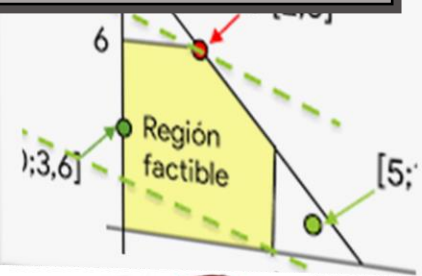
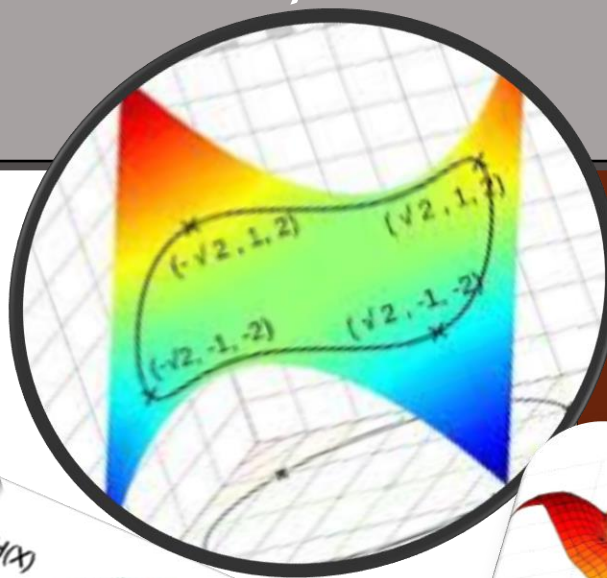


Ciclo 2025-1

Guía de Matemáticas Avanzadas para la Ciencia de Datos



ESCOM-IPN

Ciclo 2025-1

Ejercicios de evaluación del curso

Programación lineal

Simplex

1. Resolver con todas las iteraciones:

$$\min Z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2. Una tienda de abarrotes necesita decidir cuántas cajas de cinco tipos de cereales para el desayuno deben estar presentes en el anaquel cada día, con el objetivo de maximizar las ganancias. Sin embargo, hay ciertas restricciones que deben respetarse:

Demandas máximas: Cada tipo de cereal tiene una demanda máxima diaria, es decir, no se puede colocar más de un cierto número de cajas por día en el anaquel:

- Cereal 1: 100 cajas
- Cereal 2: 85 cajas
- Cereal 3: 140 cajas
- Cereal 4: 80 cajas
- Cereal 5: 90 cajas

Espacio de anaquel: El espacio total disponible en el anaquel es de 5000 pulgadas cuadradas. Cada tipo de cereal ocupa una cantidad diferente de espacio por caja:

- Cereal 1: 16 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 2: 24 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 3: 18 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 4: 22 pulgadas cuadradas por caja
- Cereal 5: 20 pulgadas cuadradas por caja

Utilidad por caja: Cada tipo de cereal genera una ganancia diferente por cada caja vendida:

- Cereal 1: \$1.10 por caja
- Cereal 2: \$1.30 por caja
- Cereal 3: \$1.08 por caja
- Cereal 4: \$1.25 por caja
- Cereal 5: \$1.20 por caja

Cantidad mínima en el anaquel: Para asegurar una presencia significativa de cada tipo de cereal, se requiere que haya al menos 15 cajas de cada cereal en el anaquel.

Objetivo:

Maximizar la utilidad total, respetando las restricciones de espacio y demanda.

Desarrolle la función objetivo y restricciones, realice los cálculos.

Corrobore los resultados con el uso de un solver.

Simplex Dual

3. Optimización en una empresa de fabricación

Una empresa fabrica dos productos (P1 y P2) y desea maximizar sus ganancias. La ganancia por cada unidad de P1 es de \$40 y por cada unidad de P2 es de \$30. Las restricciones de recursos son las siguientes:

Tiempo de producción: $2x_1 + x_2 \leq 12$ horas.

Material disponible: $x_1 + x_2 \leq 8$ unidades.

Demanda máxima del producto P1: $x_1 \leq 5$.

Formule y resuelva el problema de maximización utilizando el método simplex dual para el caso en que se agregue una cuarta restricción de recursos en la que la empresa debe producir al menos 10 unidades combinadas de P1 y P2, es decir, $x_1 + x_2 \geq 10$.

4. Minimización de costos en distribución

Una empresa desea minimizar el costo de distribución de dos productos a tres diferentes ciudades. Los costos de distribución por unidad son de \$3 para la ciudad A, \$4 para la ciudad B y \$2 para la ciudad C. Las restricciones son las siguientes:

La demanda en la ciudad A es al menos 40 unidades.

La demanda en la ciudad B es al menos 50 unidades.

La demanda en la ciudad C es al menos 30 unidades.

Formule el problema de minimización con estas restricciones y utilice el método simplex dual para resolverlo en el caso en que el suministro total disponible de producto sea de 100 unidades.

5. Optimización de recursos en una cadena de suministro

Una compañía de alimentos procesa dos productos (P1 y P2) usando dos tipos de recursos (R1 y R2). Cada unidad de P1 requiere 2 unidades de R1 y 1 unidad de R2, mientras que cada unidad de P2 requiere 1 unidad de R1 y 3 unidades de R2. La compañía tiene un total de 10 unidades de R1 y 12 unidades de R2 disponibles y desea maximizar su producción combinada.

Formule y resuelva problema utilizando el método simplex dual para el caso en que se agregue una restricción de demanda que indique que se deben producir al menos 3 unidades de P1 y al menos 4 unidades de P2.

Programación no lineal ,no restringida

6. Problema 1:

Sea la siguiente función objetivo:

$$f(t) = (125 - 50t + 5t^2) \frac{100}{[1 + 0.5(1.5t^{-3})(0.25)]^4}$$

Utilice el intervalo de búsqueda en t (0.1, 2)

7. Problema 2:

Sea la siguiente función objetivo:

$$\max f = \tan(50^\circ) x - \frac{9.81}{1250 \cos^2(50^\circ)} x^2 + 1$$

Utilice el intervalo de búsqueda en x (0, 60)

8. Problema 3:

Sea la siguiente función dada:

$$\min f(X) = -8x_1 + x_1^2 + 12x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2$$

Utilice como $X^0 = \{-4, 5\}$

9. Problema 4:

Sea la siguiente función dada:

$$\max f(X) = -2.25x_1x_2 - 1.75x_2 + 1.5x_1^2 + 2x_2^2$$

Utilice como $X^0 = \{-5, 7\}$

Programación no lineal, restringida

10. Problema

$$\begin{aligned} f_1(X) &= 2.3719 + \ln x_1 \\ f_2(X) &= -23.1441 + \ln x_2 \end{aligned}$$

$$f_3(X) = -24.0847 + \ln x_3$$

$$f_4(X) = -47.6052 + \ln x_4$$

$$f_5(X) = \ln x_5$$

Sujeto a:

$$h_k(X) = \frac{a_{i,k}}{8314}$$

$$a_{i,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g_1(X) = x_1 + x_3 + x_4 - \frac{2}{x_6} = 0$$

$$g_2(X) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_5 - \frac{14}{x_6} = 0$$

$$g_3(X) = 4x_1 + 2x_2 + x_5 - \frac{3}{x_6} = 0$$

$$g_4(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0$$

Entropia

11. Problema:

Una bolsa contiene fichas de 3 colores:

- 50% son rojas,
- 30% son azules,
- 20% son verdes.

¿Cuál es la entropía de este sistema?

12. Problema:

Considere una variable aleatoria x que sigue una distribución uniforme en el intervalo dado de $[0,10]$. Calcule la entropía diferencial.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

13. Problema:

Un alfabeto tiene 26 letras y todas son igualmente probables. ¿Cuál es la entropía máxima?



1er Examen Parcial
Matemáticas Avanzadas-LCD 2024-2025-I



Apellidos: _____
Nombre: _____

Grupo: 5AM1

Dra. Leonor
Vázquez G.

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora.

PARTE A

1. Calcular el siguiente determinante usando propiedades de los determinantes (llegar a matrices 2x2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Calcular todas las soluciones básicas del siguiente sistema de ecuaciones. ¿Cuáles de ellas son soluciones básicas factibles?

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

3. Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40g y las pequeñas 30g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes. La cantidad de pastillas pequeñas debe ser al menos el doble de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de \$40 y la pequeña de \$20. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para maximizar el beneficio? Plantea correctamente el problema matemático y resuelva por el método gráfico (sombree la región factible y remarque el vector dirección; puede usar el espacio de abajo para su dibujo).
4. Resolver el siguiente PPL por el método simplex. También determine la B óptima y su inversa.
Max $21x_1 + 24x_2 + 36x_3$; Sujeto a: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$; $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 500$; $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 1450$; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

PARTE B

5. Resolver el siguiente PPL por el método de las 2 fases:

$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 + x_4 \\ &\text{sujeto a } x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 5 \\ &\quad x_1 + 7x_2 + x_3 \geq 4 \\ &\quad 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

6. Considere un PPL que fue dado en forma estándar y del cual, una de sus tablas se presenta a continuación:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
0	0	a	0	b	0	-2
1	1	-1	0	2	0	α
-5	0	c	0	-1	1	β
-3	0	d	1	-4	0	3

Responda las siguientes preguntas en el espacio correspondiente de abajo: (a) ¿qué condiciones se deben imponer a las variables a, b, α, β ; para que la tabla sea óptima con solución única? (b) ¿qué condiciones se deben imponer a las variables a, b, α, β ; para que la tabla sea óptima con solución múltiple? (c) Si $b = -1$; $\alpha = \beta = 1$, ¿Para qué valores o intervalos de valores de las variables restantes, el problema tiene solución no acotada?



2o Examen Parcial
Matemáticas Avanzadas-LCD 2024-2025-I



Apellidos: _____
Nombre: _____

Grupo: 5AM1

Dra. Leonor
Vázquez G.

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora.

PARTE A

1. Escribir el problema dual que corresponde al siguiente problema primal (P) [no se resuelve].

$$(P) \min z = x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 5x_4 + x_5$$

Sujeto a

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq -2 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 = -4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4, x_5 \text{ libre} \end{cases}$$

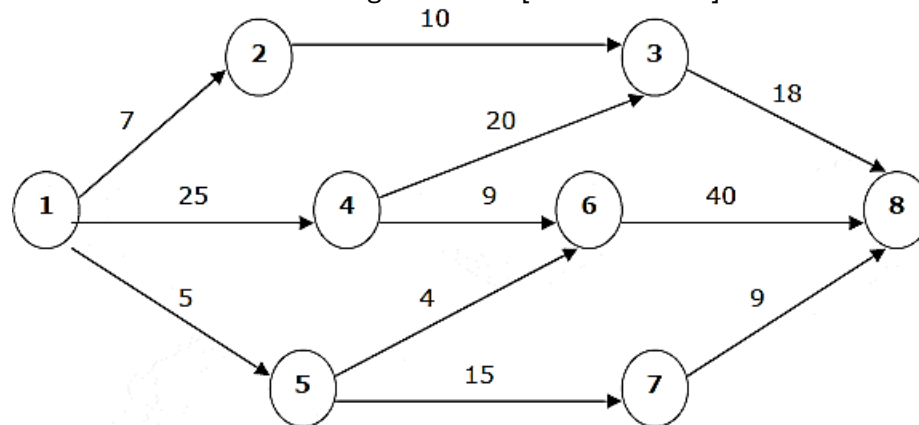
2. Si la solución del problema primal (P) de abajo es: $x^* = (2, 4, 0, 0, 7, 0)$, use el THC para calcular la solución del problema dual (D).

$$(P) \min z = -18x_1 + 7x_2 - 12x_3 - 5x_4 - 8x_6$$

Sujeto a

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7x_4 - 3x_5 - 8x_6 \geq -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 \geq 2 \\ -8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_6 \geq -4 \\ -4x_1 - 8x_3 - 7x_4 + x_5 - 3x_6 \geq -1 \\ -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 2x_5 + x_6 \geq -5 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

3. Realice el planteamiento matemático del siguiente PPL [no se resuelve].



PARTE B

4. Dada la función cuadrática de la forma: $q(x) = \frac{1}{2}xQx^t - bx^t + c$, con: $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (1, 0, 2)$.

Encontrar el óptimo y diga si es máximo o mínimo y diga si la función es cóncava o convexa.

5. Hallar los puntos críticos y su naturaleza, para la función $f(x, y) = x^3 + (y - 2)^3$.
6. Realice una aproximación por polinomio de Taylor de orden 2 de la siguiente función: $f(x, y) = e^{2x-y}$
7. Usando el método de Lagrange, encuentre los puntos críticos y diga cuales de ellos son factibles, regulares y finalmente, señale su naturaleza: $\min f(x, y) = x^2y$; s. a $x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ [para la Hessiana, evalúe las raíces hasta con 2 dígitos después del cero].
8. Realice dos iteraciones para minimizar la función, $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ en $x_0 = (1, 1)$; en la tabla de abajo reporte los parámetros que se solicitan del método indicado.

Método del gradiente descendente

k	x_k	p_k	$ \nabla f(x_k) $	$\phi(\alpha)$	$\alpha = \min_{\alpha} \phi(\alpha)$
0	(1,1)				
1					

Método del Newton

k	x_k	p_k	$ \nabla f(x_k) $	$\phi(\alpha)$	$\alpha = \min_{\alpha} \phi(\alpha)$
0	(1,1)				
1					

	3er Examen Parcial de Matemáticas Avanzadas-LCD 2023-2024-II		
Apellidos: _____ Nombre: _____	Grupo: 5AM1		Dra. Leonor Vázquez G.

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Resolver todos los problemas. Valor máximo del examen: 10 puntos.

- La bolsa de marcadores de la profesora tiene tres marcadores negros, dos rojos y un azul. Para dar su clase, la profesora siempre saca 2 marcadores de su bolsa. Sea X : “#de marcadores negros entre los 2 que se sacan para la clase” y sea Y : “#de marcadores rojos entre los 2 que se sacan para la clase”. Llene la tabla de las probabilidades marginales y conjuntas de abajo; y determine: $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ y $D(p||q)$.

$x \downarrow y \rightarrow$	0	1	2	$p(x)$
0				
1				
2				
$q(y)$				

- Desarrolle la expresión para la entropía diferencial $h_e(X)$ en base e (nats), para una variable aleatoria exponencial X con f.d.p. dada por $f(x) = 3e^{-3x}, x \geq 0$.
- Reduzca la siguiente expresión: $I(X; Z|Y) - I(Z; Y|X) + I(Z; Y) - I(X; Z)$, de modo que solo aparezcan al final constantes o entropías conjuntas o entropías individuales (NINGUNA entropía condicional). Con el resultado que obtenga, diga si la expresión es mayor o igual que cero o menor que cero.
- Determinar distribución de la entropía máxima f , si $x \in (-\infty, \infty)$; $E[X] = 0$, $E[X^2] = 1$, y además se sabe lo siguiente:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
---	---