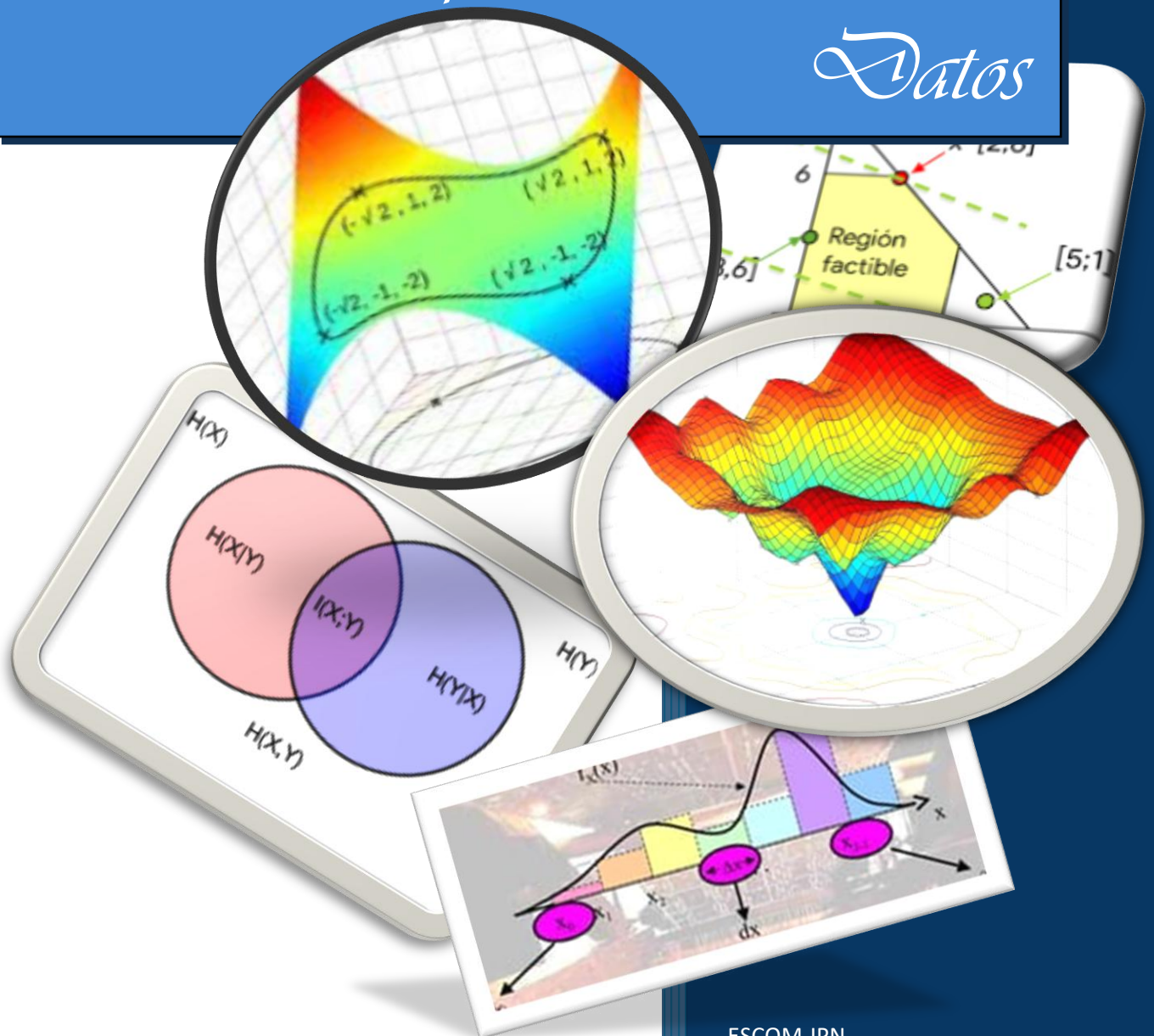


Ciclo 2025-2

Guía de Matemáticas Avanzadas para la Ciencia de Datos



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN
MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA CIENCIA DE DATOS
PRIMER EVALUACIÓN PARCIAL

Problema 1

Un producto se ensambla a partir de tres piezas diferentes. Dos departamentos fabrican las piezas a diferentes ritmos de producción, como se indica en la siguiente tabla:

Departamento	Capacidad (h/sem)	Ritmo de producción (Unidades / h)		
		Pieza 1	Pieza 2	Pieza 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Plantee las variables, función objetivo y restricciones.

3 puntos

Problema 2

Una fábrica de muebles emplea cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren dos horas-hombre para ensamblar una mesa y 5 horas-hombre para ensamblar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas.

Los precios son \$135 por mesa y \$50 por silla. La compañía opera un turno de ocho horas al día.

Determine la combinación de producción óptima para los 10 días. Aplique el método simplex con todas las iteraciones.

4 puntos

Problema 3

Sea

$$\min z = 10x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 &\geq 16 \\2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4 \\3x_1 + x_4 + x_5 &\geq 8 \\x_1 + 2x_4 - x_5 &\geq 20 \\x_i &\geq 0, i = 1 \text{ a } 5\end{aligned}$$

Aplique el método simplex dual con todas las iteraciones.

4 puntos

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN
MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA CIENCIA DE DATOS
20 DE MAYO DE 2025

Problema 1.

La trayectoria de una pelota se puede determinar por medio de la siguiente ecuación:

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + y_0$$

Donde, y es la altura en metros (m), θ_0 el ángulo inicial en radianes, v_0 la velocidad inicial en m/s , siendo, g la constante gravitacional de 9.81 m/s^2 y y_0 la altura inicial en m .

Utilice los siguientes datos para determinar la altura máxima de la pelota.

$$y_0 = 1 \text{ m}$$

$$v_0 = 25 \text{ m/s}$$

$$\theta_0 = 50^\circ = 0.8726 \text{ rad}$$

Utilice los métodos de sección dorada, interpolación cuadrática, y Newton-Raphson. Proponga intervalos y los puntos iniciales.

Problema 2.

Sea la siguiente función $f(x_1, x_2) = 6x_1^2x_2 - 9x_2^2 - 8x_1^2$ determine el vector dirección y la matriz hessiana en el punto $[4, 2]$.

Problema 3.

Para la siguiente ecuación $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 + x_1^2 - 2x_1^4 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$, determine el punto mínimo comparando los diferentes métodos de la librería de optimización de Python.

Problema 4.

Para la siguiente ecuación $f(x_1, x_2) = -2.25x_1x_2 - 1.75x_2 + 1.5x_1^2 + 2x_2^2$, determine el punto máximo comparando los diferentes métodos de la librería de optimización de Python.

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Matemáticas avanzadas

Tercera evaluación parcial, 17 de junio de 2025

Nombre completo: _____

Número de boleta: _____

Instrucciones

Resuelva los siguientes problemas. Justifique sus respuestas con claridad. Cada problema vale **1 punto**.

1. Entropía como medida de incertidumbre

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$ para $k = 1, 2, 3, \dots$.

(a) Calcule la entropía $H(X)$.

(b) Interprete el resultado en términos de incertidumbre.

2. Entropía en distribuciones continuas

Dada una variable aleatoria continua Y con densidad $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ ($y \geq 0$, $\lambda > 0$):

(a) Calcule la entropía diferencial $h(Y)$.

(b) Compare con la entropía de una distribución uniforme en $[0, \frac{1}{\lambda}]$.

3. Propiedades de la entropía

Demuestre que para dos variables aleatorias discretas X y Y :

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

¿Cuándo se cumple la igualdad?

4. Información mutua y entropía condicional

Sean A y B variables aleatorias con distribución conjunta:

$A \setminus B$	b_1	b_2
a_1	0.3	0.2
a_2	0.1	0.4

(a) Calcule $I(A; B)$.

(b) Verifique la relación $I(A; B) = H(A) - H(A|B)$.

5. Distancia de Kullback-Leibler

Dadas las distribuciones discretas:

$$P = (0.5, 0.3, 0.2), \quad Q = (0.6, 0.2, 0.2)$$

Calcule $D_{KL}(P||Q)$ e interprete el resultado.

6. Regla de la cadena para entropía

Para un sistema de 3 variables aleatorias X, Y, Z , demuestre que:

$$H(X, Y, Z) = H(X) + H(Y|X) + H(Z|X, Y)$$

Interprete el significado intuitivo.

7. Desigualdad de procesamiento de datos

Explique por qué, en una cadena de Markov $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, se cumple:

$$I(X;Z) \leq I(X;Y)$$

¿Qué implica esto en términos de información?

8. Entropía máxima en distribuciones continuas

(a) Demuestre que, para varianza fija σ^2 , la distribución normal maximiza la entropía diferencial.

(b) Calcule dicha entropía máxima.

9. Comparación entre información mutua y correlación

¿En qué situaciones la información mutua $I(X;Y)$ captura dependencias que el coeficiente de correlación de Pearson no detecta? Dé un ejemplo.

10. Problema anómalo de entropía máxima

Considere una variable aleatoria continua X con $E[X] = \mu$ y $E[|X - \mu|] = c$.

(a) Plantee el problema de maximización de entropía bajo estas restricciones.

(b) Discuta por qué este caso es "anómalo" comparado con restricciones de varianza.

	1er Examen Parcial de Matemáticas Avanzadas-LCD 2025-II	 Profra. Leonor VG
Apellidos: _____ Nombre: _____	Grupo: 5AM1	

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Valor máximo del examen: 10 puntos.

- Calcular todas las soluciones básicas del siguiente sistema de ecuaciones. ¿Cuáles de ellas son soluciones básicas factibles?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 &+ x_4 = 4 \\ &x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

- Considere un PPL que fue dado en formato estándar con la tabla final dada abajo. La tarea es asignar valores arbitrarios a las 4 variables de la tabla, de modo que la tabla sea óptima y que: (a) La solución sea única. (a) Haya múltiples soluciones. (b) la SBF sea degenerada.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
A	-3	0	0	0	0
-2	C	1	0	0	4
B	-1	0	1	0	2
3	6	0	0	1	D

Para los ejercicios 3 y 4, considere el siguiente problema: Una empresa que compra chatarra dispone de dos tipos de chatarra. El primer tipo contiene por kg, un 10% de metal A, un 10% de impurezas y no contiene metal B. El segundo tipo contiene por kg un 20% de metal A, no contiene impurezas y tiene un 10% de metal B. La empresa necesita al menos 30 kg de metal A, un máximo de 10kg de impurezas y como mucho 12kg de metal B. El precio de ambas chatarras es de \$5 y \$3 por kg, respectivamente. Se necesita determinar las cantidades óptimas de ambas chatarras que se deben comprar para satisfacer los requisitos de ambos metales y la restricción de impurezas al mínimo coste.

- Establecer el planteamiento matemático y resolver por el método gráfico.
- Resolver el problema por el método de las 2 fases. [Hint: antes de empezar a construir la forma estándar, multiplique por una constante adecuada a las ecuaciones de las restricciones para quitar a los números con decimales y que quede todo como enteros].

	2o Examen Parcial de la UA de Matemáticas Avanzadas-LCD, 2025-II		
Apellidos: _____ Nombre: _____	Grupo: 5AM1		Dra. Leonor VG

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. **Valor máximo del examen: 10 puntos.**

PARTE A

Para los problemas, considere el siguiente problema, con tabla óptima de la derecha (con variables de holgura):

$$\text{Min } z = -x_1 + x_2 - 2x_3;$$

$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 15;$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2;$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
$-\frac{3}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-5
1	0	0	1	-1	-2	5
$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$-\frac{3}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

1. Plantear los problemas (P) y (D) en su forma canónica y use el Teorema de Holgura Complementaria para calcular la solución del dual. Este problema del examen es el único en el que **NO** debe incluir las variables de holgura (abajo reporte resultados).
2. Realizar el análisis de sensibilidad del lado derecho para b_1 .
3. Realizar el análisis de sensibilidad del costo \hat{c}_1 .
4. Realizar el análisis de sensibilidad al añadir una variable x_7 con costo de 3 y con columna $a^7 = (1, -1, 1)^t$.

PARTE B

1. Dada la función cuadrática $q(x, y) = 20x + 18y - 10x^2 - y^2 - 4xy$; encontrar el máximo o mínimo y diga si la función es cóncava o convexa (hint: escriba a la función de la forma $q(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}Q\vec{x}^t - b\vec{x}^t$).
2. Hallar los 2 puntos críticos y su naturaleza de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
3. Realice una aproximación por polinomio de Taylor de orden 2 de la función: $f(x, y) = \sin(xy)$ en $(1, \pi/2)$.
4. Usando el método de Lagrange, encuentre los puntos críticos de la función de abajo. Diga cuales de ellos son factibles, regulares y su naturaleza.

$$\min f(x, y) = xe^y; \quad \text{s. a } x^2 + y^2 = 2.$$



3er Examen Parcial Matemáticas
Avanzadas-LCD 2024-2025-II



Apellidos: _____
Nombre: _____

Grupo: 5AM1

Dra. Leonor VG

Instrucciones para el examen. Debe de resolver correctamente todos los ejercicios, justificando todos sus procedimientos; si usa alguna metodología distinta a la vista en clase, deberá mostrar la equivalencia matemática para que el ejercicio sea válido. Debe guardar y silenciar y guardar su celular. Se permite el uso de calculadora. Valor máximo del examen: 10 puntos.

PARTE A

1. Use las condiciones de KKT para hallar los puntos críticos (decir si son factibles y regulares) del siguiente PP no lineal $\min f(x, y) = x^2 + y^2$ s. a $x + 2y = 4$; $x^2 + y^2 \leq 5$; $x \geq 0$.
2. Para el problema anterior, añadiendo la restricción $y \geq 0$; diga cual de los métodos iterativos puede aplicar (penalización y/o barrera). Esboce la región factible (abajo) y obtenga un punto inicial factible x_0 . Diga cuales restricciones son activas y cuáles no en el punto que eligió x_0 .

PARTE B

1. La probabilidad conjunta de dos fuentes de comunicación A y B (dos v.a.) se describe en la tabla de abajo. Determine: $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $I(X; Y)$ y $D(p||q)$ (si es posible).

		y		
		1	2	3
x	1	$1/3$	$1/12$	$1/12$
	2	$1/6$	$1/24$	$1/24$
	3	$1/6$	$1/24$	$1/24$

2. Desarrolle la expresión para la entropía diferencial $h_e(X)$ en base e (nats), para una variable aleatoria exponencial X con f.d.p. dada por $f(x) = 3e^{-3x}$, $x \geq 0$. **Hint:** use los resultados conocidos de media y varianza de esta distribución para evitar calcular directamente las integrales que salen.
3. Reduzca la siguiente expresión: $I(X; Z|Y) - I(Z; Y|X) + I(Z; Y) - I(X; Z)$, de modo que solo aparezcan al final constantes o entropías conjuntas o entropías individuales (NINGUNA entropía condicional).
4. Suponga un dado de 4 caras sencillo (tetraedro) se ha roto de una esquina. Suponga que de muchos experimentos se ha obtenido que $E[X] = 2.9$. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de este dado? (puede resolver la ecuación resultante en la calculadora).
5. Encontrar la fdp $f(x)$ con distribución de entropía máxima, si se asume que $x \in (-\infty, \infty)$; $E[X] = 0$, $E[X^2] = 4$.