

Guía de Estudio E.T.S
Matemáticas Avanzadas.
Ciclo 25/I

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCOM

ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

**1ra PARTE DEL PRIMER EXAMEN DE MATEMÁTICAS
AVANZADAS PARA ISC Gpo 4CM5 Ciclo 25/1**

Examen de Aplicación
Tipo super fácil

por Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez.

Nombre del alumno _____

Resuelve los siguientes problemas justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escribe los problemas con TINTA. Encierra en un recuadro tus resultados. (si no se entiende tu letra no se califica el examen)

No se permite consulta alguna. Duración del examen 90 min.

1 Aplicando las propiedades de los números complejos, en particular las del conjugado de z , demostrar que si z_0 es una raíz del polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

Donde a_0, a_1, \dots, a_n son números reales, entonces $\overline{z_0}$ también es una raíz.

2 Calcular los números complejos z tales que $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ es

a) Un número real. b) Un número imaginario puro.

3 Sea $z = \frac{32i}{\sqrt{3}+i^{27}}$.

a) Expresar en forma binómica y polar el número complejo z .

b) Hallar $\sqrt[4]{z}$ y represente dichas raíces en el plano complejo.

c) Calcula el perímetro de la figura formada en el inciso b)

4. Determinar el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $2|z| \leq |z - 4|$.

5. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre demuestra que

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$$

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCOM

ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

2da PARTE DEL PRIMER EXAMEN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA ISC Gpo 4CM5 Ciclo 25/1

Tipo superfácil

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez.

Nombre del alumno _____

Resuelve los siguientes problemas justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escribe los problemas con TINTA. Encierra en un recuadro tus resultados. (si no se entiende tu letra no se califica el examen)

No se permite consulta alguna. Duración del examen 90 min.

Mapeo. Conjuntos en el plano Complejo. Valor 2 puntos

1. Dada la transformación $f(z) = \frac{z+1}{z-i}$ encuentra la imagen en el plano w de la recta $y - x = 0$

Funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (2puntos)

2. a) Encontrar el valor de $(3 - 4i)^{1+i}$
b) Demostrar que $\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

Limite y continuidad. Derivada de funciones complejas (3puntos)

3. Obtener a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{\operatorname{Im} z}$, b) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}$, c) $f'(z)$ para $f(z) = (z - 3i)^{4z+2}$

Ecuaciones de Cauchy – Riemann (3 puntos)

- 4 a) Define el concepto de función analítica y función armónica.
b) Probar que la función $u(x, y) = 2x(1 - y)$ es armónica
c) Encontrar una función $v(x, y)$ tal que $f(z) = u + iv$ es analítica
d) Expresar $f(z)$ en términos de z y dar $f'(z)$

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO

ACADEMLA DE CEINCIAS BASICAS

2DO EXAMEN DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS AVANZADAS PARA
INGENIERIA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES. PLAN 2020

CICLO ESCOLAR 2024-2025/I (Inicia 26/Agosto /2024- fin 21 enero 25)

PROFESOR JUAN MANUEL CARBALLO JIMENEZ

TIPÓ Regalo de Navidad 1

Nombre del estudiante _____

Resolver las siguientes integrales utilizando los métodos de la variable compleja

Dibuja los puntos singulares en la curva que lo requiera, así como la curva de integración en todos los casos. Escribe el desarrollo matemático de cada problema con claridad y con tinta visible (si es lápiz y no se ve, no podrá ser evaluado este examen). Encierra en un rectángulo tus resultados.

1. Sea C_1 la curva dada por $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido positivo del punto $3 + 0i$ hasta el punto $0 + 3i$ y sea C_2 la curva $y = 3\sqrt{x} + 3$ recorrida de $0 + 3i$ al punto $1 + 6i$. Evaluar

$$\int_{C_1 \cup C_2} \text{Im}(z) dz$$

2. a) $\oint_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z^2 - 3z + 2} dz$

b) Demostrar que $\oint_{|z|=1} e^{-1/z} \sin(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!(2k)!}$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(2\theta)} d\theta$

4. $\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 4z^2 + 9z - 10} dz$ donde C es el rectangulo de vértices $3 + i, i, -3i, 3 - 3i$

Valor de cada problema 2.5 puntos. No se permite consulta alguna.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCOM

ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA ISC

CICLO 2024-2025/ I

(Inicia 26 Agosto 2024)

TIPO Grupo 4CM5

Profesor Juan Manuel Carballo Jiménez

Nombre: _____

Resuelve los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo tu procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escribe tus problemas con TINTA. Encierra en un recuadro tus resultados.

No se permite consulta alguna. Duración 90 min.

1. a) Determina todos los z tales que $|z|^2 + 3\operatorname{Re}(z^2) = 4$
b) Calcular y graficar las raíces cuartas de $1 - i$
2. Demuestra que $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$ es armónica. Encuentra la conjugada armónica $v(x, y)$ y expresa $w = f(z) = u + iv$ como una función de z .
3. Evaluar la siguiente integral compleja

$$\oint_C \frac{(2z+1)dz}{z^3 - iz^2 + 6z}, \quad \text{con } C: |z - 3i| = \frac{1}{3}$$

4.- Apoyándose en la teoría de la integración compleja (teorema del residuo) resuelve la siguiente integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[x^2 + 4]^2}$$

5. Encontrar la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 13}$
6. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } -3 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$, encontrar la serie de Fourier de f en $[-3, 3]$

VALOR DE CADA PROBLEMA 2.0 PUNTOS. RESOLVER 5 PROBLEMAS.

LOS PROBLEMAS 5 Y 6 SON OBLIGATORIOS



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE COMPUTO
ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS
3er EXAMEN PARCIAL DE MATEMÁTICAS
AVANZADAS PARA ISC PLAN 2020
CICLO ESCOLAR 2024-2025/I
Agosto 2024-Enero 2025 TIPO A



Nombre del estudiante _____

INSTRUCCIONES Resuelva los siguientes ejercicios justificando matemáticamente todo su procedimiento, siguiendo una estructura lógica en su desarrollo. Escriba sus problemas con tinta y encierre su resultado final. Si en el desarrollo de sus problemas no está claro, esta todo amontonado y no tiene sentido lo que escribe automáticamente se descartará

VALOR DE C/PROBLEMA 2.5 PUNTOS.

1. Demostrar que la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}, & \text{si } -T < t < 0 \\ -\frac{A}{T}, & \text{si } 0 < t < T \end{cases}$$

Esta dada por $F[w] = \frac{4A}{wT} i \operatorname{sen}^2\left(\frac{wT}{2}\right)$.

2. Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida por

$$f(t) = t^2 + t, \quad (-\pi < t < \pi), \quad f(t) = f(t + 2\pi)$$

Dibuje una gráfica de la función $f(t)$ para los valores de t desde $t = -3\pi$ hasta $t = 3\pi$ y obtenga la expansión en SERIE DE FOURIER de la función.

3. Determinar la serie de Fourier compleja de $f(x) = x^2$, si $-\pi \leq x \leq \pi$, $T = 2\pi$.
4. Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier resolver

$$a) \quad \mathfrak{F}[8e^{-at^2} \operatorname{sen}(3t)] \quad b) \quad \mathfrak{F}^{-1}\left[9e^{-\frac{(w+4)^2}{32}}\right].$$



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Primer parcial **IIA**



Nombre: _____ 4BM2

Resuelva de forma detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Hallar todas las raíces en su forma binómica y dibujarlas en el plano complejo.

- $(8)^{\frac{1}{6}}$
- $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$

2. (20 puntos) Deducir las siguientes identidades trigonométricas.

- $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$
- $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

3. (10 puntos) Evalúe.

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10}$$

4. (10 puntos) Mostrar que la parte real de un complejo z se puede obtener como la mitad de la suma del complejo y su conjugado. Determinar una expresión similar para $\text{Im}(z)$.

5. (10 puntos) Sea $z = 6e^{\pi/3i}$. Obtener $|e^{iz}|$.

6. (20 puntos) Expresar los números complejos en la forma indicada.

- $\frac{1 + \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}$ con $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ en su forma trigonométrica.
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}i\right)$ en su forma exponencial.

7. (10 puntos) Hallar el conjunto de puntos en el plano z que se determinan por la condición.

$$\frac{1}{4} < \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \text{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{2}$$

8. (10 puntos) Hallar el valor del módulo de $w = \cos(z)$ en $z = \pi + i\ln(2)$.

Profrá F. Mera y...
IIA



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Segundo parcial IIA



Nombre: _____ 4BM2

Resuelva de forma detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (20 puntos) Compruebe que la función $u = 2x(1 - y)$ es armónica y determine v tal que $f(z) = u + iv$ sea analítica, considerar la condición inicial $f(0) = 0$.
2. (10 puntos) Sea $u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_2(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, entonces $f'(z) = u_1(z, 0) - iu_2(z, 0)$. Utilizar este resultado para reescribir la función obtenida en la pregunta anterior $f(x + iy)$ como función de z .
3. (10 puntos) Obtener la parte real e imaginaria de la función $w = 2^{z^2}$.
4. (10 puntos) Resolver la ecuación $\operatorname{sen}(z) = i\pi$.
5. (10 puntos) Evalúe $\int_{-i}^i ze^{z^2} dz$.
6. (20 puntos) Evalúe la integral de contorno, considerando que C está determinada por
 - $z = (2 + i)t$ con $0 \leq t \leq 1$.
 - La quebrada que se compone del segmento $[0, 2]$ del eje real y del segmento que conecta los puntos $z_1 = 2$ y $z_2 = 2 + i$.

$$\int_C \operatorname{Re}(z) dz \quad (1)$$

7. (10 puntos) Desarrollar en serie de Taylor la función $\ln(2 - z)$ en potencias de z .
8. (10 puntos) Desarrollar en serie de Laurent la función $\frac{1}{z^2 + z}$ en el anillo $0 \leq |z| \leq 1$.

Rodrigo Flores Hernández



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
Matemáticas avanzadas para la ingeniería
Tercer parcial IIA



Nombre: _____ 4BM2

Resuelva de forma detallada y sin omitir procedimientos. Anotar nombre completo y enumerar cada hoja.

1. (25 puntos) Con el método del ascenso del gradiente aproximar el máximo de la función $f(x, y)$, utilizando como punto inicial $\vec{x}_0 = (1, -1)$. Considerar

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4 \quad (1)$$

2. (25 puntos) Con multiplicadores de Lagrange determine el valor máximo de $V(x, y, z) = xyz$ sujeto a la restricción $2x + 2y + z = 84$. Considerar que $0 \leq x$, $0 \leq y$ y $0 \leq z$.
3. (25 puntos) Determine el valor máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 4x^2 + 10y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.
4. (25 puntos) Resolver sólo UNO de los siguientes problemas, la función a optimizar debe ser de dos o tres variables.
- Encontrar la distancia mínima de los puntos sobre la superficie $xy + 2xz = 5\sqrt{5}$ al origen.
 - Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L , ¿cuál es el volumen más grande posible?



ESCOM

Alumno: _____

Grupo: _____ No. de Boleta: _____

Instrucciones: Por favor lea cuidadosamente cada pregunta y resuelva 4 de los siguientes 6 problemas. Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos (Total de 10 puntos). ¡Mucho éxito, comencemos!

0. Considere la función

$$f(z) = \cosh(2z) + \sinh(3z)$$

y calcule la derivada $f'(z)$, obtenible a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann: a) $f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x}$ y b) $f'(z) = -i \frac{\partial f(z)}{\partial y}$, para $z = x + iy$. ¿La función $f(z)$ es derivable con respecto a z ?

1. Sea

$$f(z) = z^{lnz} \sec(3z)$$

Una función definida con respecto a la variable $z = re^{i\theta}$. Calcule la variación f , con respecto a z , empleando la forma polar de la derivada a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann a) $f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f(z)}{\partial r}$ y $f'(z) = -\frac{z}{i} \frac{\partial f(z)}{\partial \theta}$

2. Calcule la integral cerrada, mediante i) desarrollo de series de Laurent y ii) cálculo de residuos por fórmula de Cauchy, alrededor de un lazo cerrado que encierra exclusivamente a los puntos críticos $z = -2$, $z = +2$ y $z = i$.

$$F(z) = \oint \frac{z^6}{(z+2)^3} dz$$

3. Calcule la integral cerrada, mediante i) desarrollo de series de Laurent y ii) cálculo de residuos por fórmula de Cauchy, alrededor del circuito que encierra a los puntos críticos $z = 8$ y $z = -8$:

$$F(z) = \oint \frac{e^z}{z-8} dz$$

Fecha: 15 de enero del 2025



Alumno: _____
Grupo: _____ No. de Boleta: _____

Instrucciones: Por favor lea cuidadosamente cada pregunta y resuelva 4 de los siguientes 6 problemas. Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos (Total de 10 puntos). ¡Mucho éxito, comencemos!

0. Calcule los coeficientes $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ y $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$, para $n = 0, 1, 2, 3$ de la serie Fourier de la función periódica $f(x) = f(x + 2\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{si } -\pi < x < 0 \\ k & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

1. Obtenga la serie de Fourier $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ de la función periódica $f(x) = f(x + 2\pi)$:

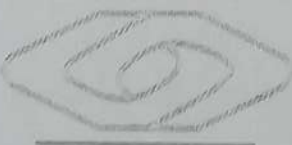
$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \\ x - \pi & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

2. Considere la función $f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$, demuestre que puede expresarse por la doble integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i\omega(t-v)} dv d\omega$$

3. Calcule la transformada de Fourier $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ de la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$



Alumno: _____

Grupo: _____ No. de Boleta: _____

Instrucciones: Por favor lea cuidadosamente cada pregunta y resuelva 4 de los siguientes 6 problemas. Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos (Total de 10 puntos). ¡Mucho éxito, comencemos!

0. Sea $z = a + ib$ una variable compleja en representación polar. i) Demuestre que es z equivalente a $z = re^{i\theta}$, vía series de Taylor. Adicionalmente, ii) utilizando la representación de Euler demuestre que

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

1. Para los incisos i & ii encuentre las soluciones/raíces de las ecuaciones, para el inciso iii) identifique los puntos críticos y cortes de ramificación y en iv) demuestre que no hay valor de z finito que cumpla con la igualdad (puntos adicionales: bosqueje las superficies de Riemann de las funciones).

- i) $5z^{7/2} = 3$
- ii) $z^6 = i$
- iii) $\ln \sqrt{(z - \bar{z})^5}$
- iv) $e^z = 0$

2. Demuestre que:

$$\sin^{-1}(z) = i \left(\ln \sqrt{1 - z^2} - iz \right)$$

A partir del resultado i) encuentre expresiones logarítmicas para las funciones inversas:

- ii) $\csc^{-1}(z)$
- iii) $\sinh^{-1}(z)$

3. i) Demuestre que:

$$e^{in\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k}$$

y ii) calcule las expresiones simplificadas para: $\cos(n\theta)$ & $\sin(n\theta)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 .