

# Primer examen de Álgebra Lineal

- Conteste claramente cada uno de los siguientes ejercicios especificando los detalles de su cálculo.
- Escriba con pluma los resultados finales.
- Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

1. La matriz de rotación en tres dimensiones al rededor del eje  $y$  está dada por

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- a) Encuentre la factorización  $LU$  de la matriz  $R_y$ , b) exprese  $R_y$  como un producto de matrices elementales, c) encuentre la inversa de  $R_y$  y d) encuentre el determinante de  $R_y$  expandiendo por cofactores sobre la tercera columna.
2. Una matriz  $A$  se llama ortogonal si  $A$  es invertible y  $A^{-1} = A^t$ . Demuestre que si  $A$  es ortogonal entonces  $\det(A) = \pm 1$ .
3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando su método preferido visto en clase

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4, \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20. \end{aligned}$$

4. Se  $A = (a_{ij})$  una matriz de  $3 \times 3$  tal que  $\det A = 8$ . Encuentre el determinante de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

## Segundo examen de Álgebra Lineal

- Conteste claramente cada uno de los siguientes ejercicios y especifique los detalles de su cálculo.

- Remarque con pluma los resultados finales.

- Nombre:

Grupo:

1. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones  $x + y = xy$  y  $\alpha x = x^\alpha$ .
2. Sea  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un conjunto de vectores linealmente independiente. Determine si el siguiente conjunto de vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_n$  es linealmente independiente o linealmente dependiente. Justifique su respuesta.
3. Encuentre a) el rango, b) la nulidad y c) una base para la imagen y el espacio nulo de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. En  $P_3$  exprese el polinomio  $4x^2 - x + 5$  en términos de la base  $\{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\}$ .

# Tercer examen de Álgebra Lineal

- Conteste claramente cada uno de los siguientes ejercicios y especifique los detalles de su cálculo.
- Remarque con pluma los resultados finales.
- Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_

1. Construya una base ortonormal para el espacio dado por

$$\Omega = (x, y, z) : 3x - 2y + 6z = 0.$$

2. Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta \\ \beta + 4\gamma + 3\delta \\ \alpha + 6\gamma + 6\delta \end{pmatrix}.$$

Demuestre que  $T$  es una transformación lineal.

3. De la transformación anterior encuentre: a)  $\text{nu}(T)$ ,  $\nu(T)$ , b)  $\text{Im}(T)$ ,  $\rho(T)$ , y c) su representación matricial. d) ¿Es  $T$  un isomorfismo? (justifique su respuesta).
4. Sea  $V = P_4$  y  $W = \{p \in P_5 : p(0) = 0\}$ . Demuestre que  $V$  es isomorfo a  $W$ .

---

## Examen 1 de Álgebra lineal.

Profesora: Leticia Cañedo Suárez.

---

Lunes 14 de octubre de 2024

**Importante:** Declara todas las variables que utilices y los supuestos necesarios, no omitas ningún razonamiento.

**Instrucciones:** Resuelve clara, limpia y ordenadamente. Escribe el número de problema y subraya con rojo el resultado.

1.\_ Considera el siguiente problema: Se desea encontrar la ecuación del polinomio de grado 2 cuya gráfica pasa por los puntos (1, 6), (2, 3) y (3, 2).

a) Plantea el sistema de ecuaciones.

b) Escribe la matriz aumentada.

c) Resuelve usando el método de Gauss-Jordan.

d) Escribe la representación matricial del sistema.

e) Utiliza expansión por cofactores o las propiedades para calcular el determinante de la matriz de coeficientes.

f) Calcula la inversa de la matriz de coeficientes.

g) Encuentra la solución del sistema usando el inciso anterior.

2.\_ Si  $M = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  Encuentra la matriz  $Y$  tal que  $NYM - K = 0$  utilizando únicamente álgebra matricial.

3.\_ Sean  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  y  $C = (c_{ij})$  matrices:

a) Si  $D = (AB)C$  escribe las dimensiones de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .

b) Sin hacer todo el producto escribe el elemento  $d_{ij}$ .

---

**Examen 2 de Álgebra lineal.**  
**Profesora: Leticia Cañedo Suárez.**

---

**Jueves 21 de noviembre de 2024**

**Instrucciones:** Contesta clara, limpia y ordenadamente, no omitas ningún razonamiento y subraya el resultado.

1.\_ Dados los subespacios  $H$  y  $K$  de un espacio vectorial  $V$ , la suma de  $H$  y  $K$  es el conjunto de todos los vectores en  $V$  que pueden escribirse como la suma de dos vectores, uno en  $H$  y otro en  $K$ ; esto es,

$$H + K = \{\underline{w} | \underline{w} = \underline{u} + \underline{v} \text{ con } \underline{u} \in H \text{ y } \underline{v} \in K\}$$

¿Es el conjunto  $H + K$  un s.e.v de  $V$ ? Si lo es prueba las condiciones necesarias y si no lo es propón un contraejemplo.

2.\_ Sean  $S = \{(2,0,1), (1,2,0), (1,1,1)\}$  y  $T = \{(6,3,3), (4,-1,3), (5,5,2)\}$  dos bases para  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Encuentra la matriz de transición de la base  $T$  a la base  $S$ .
- b) Encuentra el vector de coordenadas de  $\underline{v} = (4,-9,5)$  utilizando la matriz de transición que encontraste en el inciso anterior.

3.\_ Sea  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una t.l para la cual  $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  Encuentra:

- a)  $\text{Ker}(L)$ , una base para el  $\text{ker}(L)$  y  $\dim(\text{ker}(L))$
- b)  $\text{Im}(L)$ , una base para  $\text{Im}(L)$  y  $\dim(\text{Im}(L))$
- c) ¿Es una t.l uno-uno? ¿Por qué?
- d) ¿Es sobre? ¿Por qué?
- e) ¿Es un isomorfismo? ¿Por qué?

4.\_ a) Si  $A$  es una matriz de  $7 \times 5$ , ¿Cuál es el mayor valor posible para el rango de  $A$ ? Explica tu respuesta.

b) ¿Cuál es la relación que existe entre la nulidad y el rango de la matriz  $A_{m \times n}$ ?

NOMBRE:	Examen 3 de AL	FOLIO		
TEMA:	Profesora: Leticia Cañedo	DIA	MES	AÑO
MATERIA:		16	12	24

Nombre: \_\_\_\_\_

1.- Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $\text{tr}(A) = 8$  y  $|A| = 12$

Encuentra los valores propios de A.

2.- Utiliza la diagonalización para demostrar que

$$A^6 = \begin{pmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 2^{12} \end{pmatrix} \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.- Diagonaliza ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{Verifica tu resultado})$$

**ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO**  
**PRIMER EXAMEN DE ALGEBRA LINEAL**

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **GRUPO: 2CV3**

**Instrucciones:**

Contesta clara, limpia y ordenadamente. No omitas ningún razonamiento. Encierra el resultado con tinta. No se permite el uso de formulario. Valor de cada problema 2 puntos

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

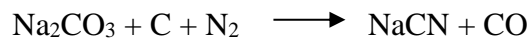
$$kx + y + z - 1 = 0$$

$$x + y + kz - 1 = 0$$

$$x + ky + z - 1 = 0$$

Qué valor debe tomar el parámetro  $k$  para que el sistema:

- a) Tenga solución única
  - b) Tenga un conjunto infinito de soluciones
  - c) No tenga solución
2. La suma de las tres cifras de un número es 10. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 4 a la cifra de las unidades, y la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades excede en 8 a la cifra de las decenas. ¿Cuál es el número?
- a) Plantea el sistema de ecuaciones
  - b) Escribe el sistema en forma matricial
  - c) Encuentra la solución utilizando la inversa de la matriz de coeficientes.
3. Balancea la ecuación química de la siguiente reacción:



4. Para que valores de  $k$  la matriz  $B$  es singular.

$$B = \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix}$$

5. Encuentra el determinante de la siguiente matriz utilizando las propiedades.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Extra valor 1 punto: Calcula el siguiente determinante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



1er examen parcial de Álgebra Lineal

Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_/8

Resuelve los siguientes ejercicios de manera clara y ordenada, recuerda que se califica el procedimiento. Cada ejercicio vale 2 puntos.

1. Representa en forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}4x - y + z &= 4 \\ 2y - z + 2x &= 2 \\ 6x + 3z - 2y &= 12\end{aligned}$$

2. Determina la matriz inversa de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  mediante su adjunta

3. Utiliza propiedades de determinantes para calcular  $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. Dadas las matrices  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calcula  $E^2 - 3DC$ .





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO



## PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE ALGEBRA LINEAL

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

### Instrucciones:

Conteste clara, limpia y ordenadamente. No omitas ningún razonamiento. Escribe el resultado con tinta. No se permite el uso de formulario ni calculadora. Valor de cada uno de los problemas 2 puntos

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$kx + y + z - 1 = 0$$

$$x + ky + z - 1 = 0$$

$$x + y + kz - 1 = 0$$

Que valores deben tomar el parámetro  $k$  para que el sistema:

- a) Tenga solución única
- b) Tenga un conjunto infinito de soluciones
- c) No tenga solución

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales y muestre con el resultado la ley de los cosenos, donde  $a, b, c \neq 0$ , son números reales.

$$c \cos \alpha + a \cos \gamma = b$$

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c$$

$$c \cos \beta + b \cos \gamma = a$$

3. Encuentre el determinante de la siguiente matriz, utilizando únicamente las propiedades.

$$B = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Determine la inversa de la matriz  $D$ .

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Considere la siguiente matriz  $A$ , para que valores del parámetro  $k$ , la matriz es invertible.

$$A := \begin{pmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 5 & k-3 & 1 \\ 6 & -6 & k+4 \end{pmatrix}$$

**Primer Examen Departamental de Algebra Lineal  
T1**



Nombre \_\_\_\_\_

Número de Boleta \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**TEMA A EVALUAR: OPERACIONES ENTRE MATRICES. VALOR: 0.3 PTS.**

1.- Realice las operaciones indicadas con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ :  $-7A + 3B$

**TEMA A EVALUAR: INVERSA DE UNA MATRIZ. VALOR: 1.0 PTS.**

2.- Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcule  $A^{-1}$  si existe. (Utilice el método de matriz aumentada).

**TEMA A EVALUAR: MATRICES ELEMENTALES. VALOR: 0.3 PTS.**

3.- Sea  $E$  una matriz que representa la operación elemental  $R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2$ . Verifique que  $\det E = 1$ .

**TEMA A EVALUAR: INVERSA DE UNA MATRIZ A TRAVÉS DE SU ADJUNTA Y OPERACIONES ENTRE MATRICES. VALOR: 1.0 PTS.**

4.- Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcule  $A^{-1}$  si existe, a través de su adjunta. Para calcular el determinante sólo podrás usar cofactores o propiedades de determinantes (cualquier otra forma de calcular el determinante no será aceptada e invalidará el ejercicio). Compruebe que es su inversa.

**TEMA A EVALUAR: REGLA DE CRAMER. VALOR: 0.4 PTS.**

5.- Resuelva el sistema  $\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 2 \\ -5x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 11 \end{matrix}$  utilizando la Regla de Cramer.

## Examen 1 Álgebra lineal

Nombre: \_\_\_\_\_

Resolver explicando tu respuesta 4 de 6 problemas, los problemas 1 y 3 son obligatorios.

1. a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada.

b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de  $\alpha$ . (Usar b) )

$$\begin{array}{rrcr} 9x & +3y & -3z & = & 3 \\ 4x & +2y & & = & 0 \\ x & +2y & +4z & = & \alpha \end{array}$$

2. Para las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Calcular  $\det(AB^2)$ ,  $\det(A^{-1}B^T)$  y  $\det(2A^2 \cdot B^3)$

3. a) Si  $a \in \mathbb{R}$ , calcular el determinante de la matriz  $A$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}$$

b) Usando la regla de Cramer, resolver el sistema para  $a = 2$

$$\begin{array}{rrcr} x & -2y & +az & = & 1 \\ 3x & +2y & +z & = & 2 \\ 2x & & +az & = & 3 \end{array}$$

4. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rrrrr} \lambda 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -6\alpha \\ 2x_1 & + & x_2 & + & (\beta + 1)x_3 & = & 4 \\ \beta x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2\alpha \end{array}$$

a) Encontrar los valores de  $\beta$  y  $\alpha$  para los cuales el sistema tiene solución única, soluciones infinitas y para cuales es inconsistente.

5. Si  $A$  es la matriz del sistema

$$\begin{array}{rrcr} 2x_2 & -3x_3 & = & 2 \\ x_2 & +4x_3 & = & 4 \end{array}$$

a) Obtener la factorización  $PA = LU$ .

b) Resolver el sistema usando la factorización  $PA = LU$

6. Contestar los siguientes incisos explicando su razonamiento de manera clara. Suponga que  $A$  es una matriz de orden  $n$ ,  $A \in \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ .

- Definir a la matriz transpuesta.
- Si  $B = A^T A$ , explicar por qué  $B$  es simétrica.
- Explicar por qué si  $A$  es invertible entonces  $B$  invertible

## Examen 1 Álgebra lineal

Nombre: \_\_\_\_\_

Resolver explicando tu respuesta 4 de 6 problemas, los problemas 1 y 3 son obligatorios.

1- a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada. b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de  $\alpha, \beta$ .

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & \alpha \\ 2x & - & 2y & & & = & 2\beta \\ x & - & 2y & - & z & = & \alpha - \beta \end{array}$$

y calcular la norma de la solución  $\tilde{\mathbf{x}}(\alpha, \beta)$ .

2.-Se dan los vértices de un paralelogramo  $ABCD$  con  $A = (0, 1, -1)$ ,  $B = (1, 0, 2)$  y  $C = (2, 3, 0)$ .

- Calcular las coordenadas de  $D = (x_0, y_0, z_0)$  considerando que  $\overrightarrow{AD}$  es paralelo a  $\overrightarrow{BC}$ . Calcular los ángulos internos del vértice  $A$
- Calcular el plano que contiene al paralelogramo.
- Encontrar el conjunto intersección del plano en iii) y el plano  $x + y + z = 2$ .

3.- Calcular para que valores del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{array}$$

\* Se tiene una solución única

- Se tiene una infinidad de soluciones
  - El sistema es inconsistente
- Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , con  $a \neq 0$  calcular, usando inducción matemática la matriz  $A^n$ . (Recordar la siguiente factorización  $a^{n-1} = (a-1)(a^{\{n-1\}} + a^{\{n-2\}} + \dots + a + 1)$ ).
  - Sabiendo que  $A$  es simétrica e invertible
    - Demostrar que  $A^{-1}$  también es simétrica.
    - Explicar por que  $\det(A^{-1}) \neq 0$ .
    - Demostrar usando las propiedades del determinante que  $A^n$  también es invertible y  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
    - Si  $B$  es una matriz invertible, explicar por que  $M = B \cdot B^T$  es invertible y  $\det(M) > 0$ .
  - Obtener las matrices elementales que transforman a  $A$  en una matriz triangular
    - Usar a) para obtener la factorización  $PA = LU$  de la matriz asociada al sistema

$$\begin{array}{rrcrcl} & & 2y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & 2y & - & 4z & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -8 \end{array}$$

c) Resolver el sistema **usando** la factorización  $PA = LU$



ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.\_ Hallar los valores de  $k$  para que el sistema

$$\begin{aligned}x + 2y + kz &= 2 \\ kx + (k + 2)y - kz &= 5k \\ 3x + (k + 4)y + (2k + 3)z &= 4k + 5\end{aligned}$$

(a) Tenga solución única, (b) No tenga solución y (c) Tenga infinitud de soluciones.

2.\_ (a) Si las matrices  $A$  y  $B$  son invertibles, despejar a la matriz  $C$  de la siguiente ecuación matricial.

$$3AB - 7ACB + 5BA = (A - B)(A + B)$$

(b) Comprobar el resultado para

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3.\_ Demuestre que no existen matrices  $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}$  tales que  $AB - BA = I$ . Sugerencia: Demuestre que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

4.\_ Demostrar que las matrices simétricas  $2 \times 2$  de la forma  $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$  que conmutan con la matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  fija, satisfacen la ecuación del plano

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = 0\}$$

donde  $A = b$ ,  $B = c - a$  y  $C = -b$ .

5.\_ Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

y las matrices columna  $\vec{b}_{3 \times 1}$

$$\begin{bmatrix} 52 \\ -83 \\ -26 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -19 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -100 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -71 \\ 28 \\ 46 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -79 \\ 38 \\ 51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -19 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -132 \\ 184 \\ 72 \end{bmatrix} \cdot \quad \begin{bmatrix} 39 \\ -78 \\ -20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11 \\ -41 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -32 \\ 43 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -50 \\ 44 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -90 \\ 164 \\ 45 \end{bmatrix}.$$



ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.\_ Hallar los valores de  $k$  para que el sistema

$$\begin{aligned}x + 3y + kz &= -5 \\ kx + (2k + 3)y - kz &= k + 2 \\ 2x + (k + 3)y + 10z &= 3k + 5\end{aligned}$$

(a) Tenga solución única, (b) No tenga solución y (c) Tenga infinitud de soluciones.

2.\_ (a) Si las matrices  $A$  y  $B$  son invertibles, despejar a la matriz  $C$  de la siguiente ecuación matricial.

$$5AB + 2ACB - 7BA = (A + B)(A - B)$$

(b) Comprobar el resultado para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

3.\_ Dar las condiciones para los elementos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

De modo que  $A^{-1} = A^T$ .

4.\_ Hallar por lo menos una matriz  $B$  simétrica  $2 \times 2$  tal que  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ , donde  $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ .

5.\_ Decodificar el mensaje enviado vía la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y las matrices columna  $\vec{b}_{3 \times 1}$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -35 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 38 \\ -19 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 30 \\ -16 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -48 \\ 46 \\ -11 \end{bmatrix}.$$





ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.\_ Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas del mismo tamaño invertibles. Demostrar que  $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$ .

2.\_ Determine si el conjunto de todas las funciones continuas  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , tales que  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , son un subespacio de  $C(-\infty, \infty)$ .

3.\_ Determine si el conjunto

$$S = \{1 - x - 3x^2 + 2x^3, -1 + 3x + 4x^2 - 3x^3, -1 - 3x + 5x^2, 1 - x + 5x^2 + 2x^3\}$$

es una base de  $P_3$ .

4.\_ Encuentre (a) una base para el espacio columna de  $A$ , (b) una base para el espacio renglón de  $A$ , (c)  $\text{rango}(A)$ , una base para el espacio nulo de  $A$  y (d) nulidad( $A$ ) si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

5.\_ Sean  $\mathfrak{B}_1 = \{-1 - 3x - 4x^2, 1 + 2x + x^2, -3 - 5x - x^2\}$  y  $\mathfrak{B}_2 = \{-4 + 3x + 4x^2, 1 - x + x^2, -2 + 2x - x^2\}$  dos bases de  $P_2$ . Decodifique el mensaje enviado vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base  $\mathfrak{B}_2$ , si

$$\begin{aligned} [r_1(x)]_{\mathfrak{B}_1} &= \begin{bmatrix} -101 \\ -563 \\ -161 \end{bmatrix}, [r_2(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 356 \\ 1985 \\ 567 \end{bmatrix}, [r_3(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 27 \\ 148 \\ 42 \end{bmatrix}, \\ [r_4(x)]_{\mathfrak{B}_1} &= \begin{bmatrix} 437 \\ 2549 \\ 740 \end{bmatrix} \text{ y } [r_5(x)]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} -392 \\ -2380 \\ -700 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

1.\_ Sean  $A_1, A_2, \dots, A_k$  matrices invertibles del mismo tamaño. Demostrar que

$$\text{adj}(A_1 A_2 \cdots A_k) = \text{adj}(A_k) \text{adj}(A_{k-1}) \cdots \text{adj}(A_2) \text{adj}(A_1)$$

2.\_ Determine si el conjunto de todas las matrices cuadradas  $A$ ,  $n \times n$  tales que  $\det(A) = 0$  es un subespacio de  $M_{n \times n}$ .

3.\_ Determine si el conjunto

$$S = \{-1 - 3x + 5x^2 - 4x^3, 1 + 3x - 4x^2 + 4x^3, -1 - x - x^2 - 2x^3, -2 - x^2 - 2x^3\}$$

es una base de  $P_3$ .

4.\_ Encuentre (a) una base para el espacio columna de  $A$ , (b) una base para el espacio renglón de  $A$ , (c)  $\text{rango}(A)$ , una base para el espacio nulo de  $A$  y (d) nulidad( $A$ ) si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

5.\_ Sean  $\mathfrak{B}_1 = \{-1 - 3x - 4x^2, 1 + 2x + x^2, -3 - 5x - x^2\}$  y

$\mathfrak{B}_2 = \{-4 + 3x + 4x^2, 1 - x + x^2, -2 + 2x - x^2\}$  dos bases de  $P_2$ . Decodifique el mensaje enviado vía las matrices de coordenadas de los vectores con respecto a la base  $\mathfrak{B}_1$ , si

$$\begin{aligned} [r_1(x)]_{\mathfrak{B}_2} &= \begin{bmatrix} 35 \\ -194 \\ -153 \end{bmatrix}, [r_2(x)]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} 168 \\ -2078 \\ -1346 \end{bmatrix}, [r_3(x)]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} 45 \\ -573 \\ -369 \end{bmatrix}, \text{ y} \\ [r_4(x)]_{\mathfrak{B}_2} &= \begin{bmatrix} -180 \\ 1987 \\ 1315 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Examen 2. Álgebra lineal 2CV5

Responder 4 ejercicios.

- 1- Sean  $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)\}$  y  $\mathcal{T} = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  dos conjuntos de vectores de  $\mathbb{R}^3$ .
- a) Verificar que  $S$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  usando la definición de base de un espacio vectorial.
  - b) Encontrar la matriz cambio de base de  $\mathcal{T}$  a  $S$ , puede calcular la matriz directamente o bien calculando  $Q_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}}$  y de  $Q_{\mathcal{C} \rightarrow S}$ .
  - c) Si  $(\mathbf{v})_S = (1, 0, -2)_S$  calcular las coordenadas del vector con respecto a  $\mathcal{T}$ .
- 2- Sea  $W$  el conjunto de vectores que son ortogonales a  $\mathbf{w} = (-1, 2, 1)$ .
- a) Explicar por que el conjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones.
  - b) Demostrar que  $W$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .
  - c) Calcular una base para  $W$  y su dimensión.
- 3- Construir una base ortonormal para  $\mathbb{R}^3$  a partir del siguiente conjunto de vectores  $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1), \mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1), \mathbf{v}_3 = (-3, 5, 1), \mathbf{v}_4 = (1, 2, -4)\}$ .
- 4- Para qué valores de  $k$ , los siguientes vectores  $A = \{(1, 2, 3), (3, k, k + 3), (2, 4, k)\}$ .
- i) son linealmente independientes,
  - ii) generan una recta.
  - iii) un plano.
- 5- Considere el subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^4$  generado por los vectores  $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1 = (0, 1, -3, 2), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (3, 0, 1, -1) \text{ y } \mathbf{v}_4 = (3, 0, 1, -1, 13)\}$ .
- i) ¿Es  $\mathcal{A}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ ?
  - ii) Extraer una base de  $W$  y su dimensión.
  - iii) Obtener la ecuación o sistema de ecuaciones que describan al subespacio  $W$ .
- 6- Sea  $V = M^{2,2}(R)$  y

$$W_1 = \left\{ A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \left\{ A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & c \end{pmatrix} \right\}$$

Demostrar que  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$  y encontrar las dimensiones de  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_1 \cap W_2$ .



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
Escuela Superior de Cómputo  
*Academia de Formación Básica*



*2º examen parcial de Álgebra Lineal*

Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_/8

Resuelve los siguientes ejercicios de manera clara y ordenada, recuerda que se califica el procedimiento. Cada ejercicio vale 2 puntos.

1. En el espacio  $M$  de matrices  $2 \times 2$  se tiene el conjunto de matrices con la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ . Demuestra que es un subespacio vectorial de  $M$ .
2. Comprueba si el conjunto de polinomios  $B = \{t^2 - 2t + 1, 2t + 1, -1\}$  es una base del espacio vectorial  $P_2$ . Escribe el polinomio  $(3t + 1)^2$  como combinación lineal de los vectores en  $B$ .
3. Dado el producto interno  $\langle u|v \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$ , determina la distancia entre los vectores  $(1,2,-1)$  y  $(2,4,3)$ , así como la norma de  $v$ .
4. Utiliza el método de Gram-Schmidt para determinar la base ortonormal asociada a la base  $B = \{(1,0,1), (1,0,2), (1,1,-1)\}$ .

**Segundo Examen Departamental de Algebra Lineal  
T1**



Nombre \_\_\_\_\_

Número de Estudiante \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**TEMA A EVALUAR: SUBESPACIOS VECTORIALES. VALOR: 2.5 PTS.**

Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V

$$V = \mathbb{R}^3; \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0 \right\}$$

**TEMA A EVALUAR: INDEPENDENCIA LINEAL. ESPACIO GENERADO. BASES Y DIMENSIÓN.**

$$\text{En } \mathbb{R}^3: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- a) Determine si el conjunto de vectores es linealmente independiente o linealmente dependiente (use sólo definición). (valor: 1.5 pts)
- b) Determine si el conjunto de vectores genera el espacio vectorial dado (use sólo definición). (valor: 1.5pts)
- c) Con los resultados obtenidos en los incisos a) y b) determine si el conjunto de vectores es una base para el espacio a que se refiere. Justifique su respuesta. (valor: 1.0 pts)
- d) En caso de que el conjunto de vectores sea una base ¿Cuánto vale la dimensión del espacio a que se refiere? Justifique su respuesta. (valor: 0.5pts)

**TEMA A EVALUAR: CAMBIOS DE BASE. VALOR: 3.0 PT.**

$$\text{Escriba } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ en términos de la base dada: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO



## SEGUNDO EXAMEN DEPARTAMENTAL DE ALGEBRA LINEAL

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

### Instrucciones:

Contesta clara, limpia y ordenadamente. No omitas ningún razonamiento. Escribe el resultado con tinta. No se permite el uso de formulario ni calculadora. Valor de cada uno de los problemas 2.5 puntos

**PROBLEMA 1** a) Encuentra una base ortonormal para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo. b) Encuentra la nulidad y el rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\-2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\4x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 &= 0\end{aligned}$$

**PROBLEMA 2** Si los vectores  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  pertenecen a  $R^3$ , donde  $v_1 = (1, -1, 1)$ ,  $v_2 = (-2, 3, -1)$ ,  $v_3 = (-3, 5, -1)$ ,  $v_4 = (1, 2, -4)$ , construye una base ortonormal de  $R^3$  a partir de ellos.

**PROBLEMA 3** Sean  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $T = \{w_1, w_2, w_3\}$  dos bases del espacio vectorial  $R^3$ , donde  $w_1 = (0, 1, 1)$ ,  $w_2 = (1, 0, 0)$  y  $w_3 = (1, 1, 0)$ . Si la matriz de cambio de la base T a la base S esta dada por:

$$P_{T \rightarrow S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Cuáles son los vectores de la base S}$$

**PROBLEMA 4** Considera las siguientes bases del espacio vectorial  $R^3$ ,  $B = \{(0, -2, 3), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$  y  $C = \{(0, -1, 1), (0, 3, 0), (1, -1, 1)\}$ . Sean  $[u]_C = (2, 1, 3)$  y  $[v]_B = (-1, 4, 1)$ , dos vectores escritos en términos de las bases B y C respectivamente.

- Determinar la matriz de transición de la base C a la base B.
- Determinar la matriz de transición de la base B a la base C.
- Encuentra  $[u]_B$ .
- Encuentra  $[v]_C$ .

**Tercer Examen Departamental de Algebra Lineal  
T1**



Nombre \_\_\_\_\_

Número de Boleta \_\_\_\_\_ Fecha \_\_\_\_\_

**TEMA A EVALUAR: TRANSFORMACIONES LINEALES. VALOR: 3.0 PTS.**

Determine si la transformación dada de  $R^3 \rightarrow R^2$  es lineal.

$$T: R^3 \rightarrow R^2; \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

**TEMA A EVALUAR: PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT. VALOR: 5.0 PTS.**

Construya una base ortonormal en  $R^3$  comenzando con la base  $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**TEMA A EVALUAR: NUCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL. VALOR: 2.0 PTS.**

Encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada. Una vez que determine el rango y la nulidad, justifique su respuesta con palabras sobre sus resultados.

$$T: R^2 \rightarrow R; \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$$



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO



## TERCER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE ALGEBRA LINEAL

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

### Instrucciones:

Contesta clara, limpia y ordenadamente. No omitas ningún razonamiento. Escribe el resultado con tinta. No se permite el uso de formulario.

### 1. Encuentra la matriz $Q$ que diagonaliza ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y verifica que } Q^{-1}AQ = D, \text{ donde } D \text{ es una matriz diagonal}$$

cuyas componentes diagonales son los valores propios de  $A$

Para la matriz  $A$  anterior utiliza la diagonalización para calcular  $A^4$

**Valor 4 Puntos**

### 2. Considera la siguiente transformación lineal $T : P_3 \rightarrow M_{22}$ definida como:

$$T : (a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + c + 2d & 2a + b + c + 4d \\ 2a + b + c + 3d & a + b + 2d \end{pmatrix}$$

a) Es un isomorfismo o no, demuestre.

b) Encontrar la representación matricial de la transformación, respecto a las bases canónicas de  $P_3$  y de  $M_{22}$ .

**Valor 3 Puntos**

### 3.- Considere la siguiente transformación lineal $T : P_1 \rightarrow P_2$ definida como:

$$T(p(x)) = x \cdot p(x) + p(0)$$

a) Determine el kernel y la imagen de la transformación, y mencione que dimensión tiene cada uno de ellos; así como si es isomorfismo o no.

b) Encuentre la representación matricial de la transformación respecto a las siguientes bases:  $B_1 = \{x+1, x-1\}$  y  $B_2 = \{x^2+1, x-1, x+1\}$ .

c) Verificar la relación  $[T(u)]B_2 = MB_1$  para el vector  $u=3x-2$

**Valor 3 Puntos**





*3er examen parcial de Álgebra Lineal ISC*

Nombre: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_/8

Resuelve los siguientes ejercicios de manera clara y ordenada, recuerda que se califica el procedimiento. Cada ejercicio vale 2 puntos.

1. Determina la imagen del vector  $v(1,1,-2)$  y la preimagen de  $w(4,4,4)$  bajo la transformación lineal  $T(x,y,z) = (x-y, y-z, x-z)$ . Determina la matriz estándar de  $T$  así como el kernel y rango de la misma (subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ ).
2. Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , calcula una base para el kernel y otra para el rango de la transformación, así como las dimensiones de estos. Determina una representación de  $A$  si las bases que se utilizan son  $\{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$  para el dominio y  $\{(1,0,-1), (1,-1,0), (0,1,-1)\}$  para el rango.
3. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .
4. Calcula los valores y vectores propios asociados a la matriz  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y diagonalízala.



ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

- 1.\_ Obtener una base ortonormal a partir de la base  $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 1, 1), (3, 1, -1), (2, -1, -1)\}$ .
- 2.\_ Para la siguiente transformación lineal

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular  $\text{Im}(T)$ ,  $\text{Ker}(T)$  así como sus respectivas bases y dimensiones  $\rho(T)$  y  $\nu(T)$ . ¿Es  $T$  un isomorfismo?

- 3.\_ Hallar una matriz  $P$  que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- 4.\_ Hallar una matriz  $P$  que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 5.\_ Decodifique el mensaje enviado vía los vectores  $\vec{v}_i = T^{-1}(\vec{w}_i)$  en donde

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 87 \\ 18 \\ 44 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 39 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} -11 \\ -43 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{bmatrix} 108 \\ -10 \\ 83 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_5 = \begin{bmatrix} 87 \\ 21 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_6 = \begin{bmatrix} 78 \\ 35 \\ 23 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_7 = \begin{bmatrix} 62 \\ -21 \\ 61 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_8 = \begin{bmatrix} 93 \\ 19 \\ 47 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}_9 = \begin{bmatrix} 162 \\ -17 \\ 128 \end{bmatrix}.$$



ÁLGEBRA LINEAL  
Prof. Jesús Ortuño Araujo.



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Calif: \_\_\_\_\_

**Instrucciones:** Resuelve completa y correctamente cada uno de los siguientes ejercicios y problemas.

- 1.\_ Obtener una base ortonormal a partir de la base  $\mathcal{B}_1 = \{(2, -1, 1), (1, -1, -1), (1, -3, 1)\}$ .
- 2.\_ Para la siguiente transformación lineal

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Calcular  $\text{Im}(T)$ ,  $\text{Ker}(T)$  así como sus respectivas bases y dimensiones  $\rho(T)$  y  $\nu(T)$ . ¿Es  $T$  un isomorfismo?

- 3.\_ Hallar una matriz  $P$  que diagonalice a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- 4.\_ Hallar una matriz  $P$  que diagonalice ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}.$$

- 5.\_ Decodifique el mensaje enviado vía los vectores  $\vec{v}_i = T^{-1}(\vec{w}_i)$  en donde

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -80 \\ -4 \\ -53 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -38 \\ -2 \\ -25 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 57 \\ 57 \\ 94 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{bmatrix} -63 \\ 13 \\ -28 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_5 = \begin{bmatrix} -83 \\ 5 \\ -44 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_6 = \begin{bmatrix} -93 \\ -17 \\ -73 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_7 = \begin{bmatrix} -19 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_8 = \begin{bmatrix} -85 \\ 3 \\ -48 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{w}_9 = \begin{bmatrix} -94 \\ -30 \\ -99 \end{bmatrix}.$$

# Examen 3

## Álgebra Lineal

Nombre: \_\_\_\_\_

Resolver explicando tu respuesta e incluyendo todos los cálculos.

1- Considere la matriz a) Defina que es la inversa de una matriz cuadrada y aplica el método de Gauss-Jordan para calcular  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Calcular los valores propios y vectores propios de  $A$ .
- b) Determinar si la matriz es diagonalizable.
- c) Si b) es afirmativa, obtener la base  $\mathcal{B}'$  que diagonaliza a la matriz.
- d) Calcular a las matrices tal que  $P^{-1}AP$  es una matriz diagonal.

2- Si  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ x + 2y - z \end{pmatrix}$$

- a) Obtener la matriz que representa a  $T$  en la base canónica,  $[T]_{\mathcal{C}}$ .
- b) Obtener  $\text{Ker}(T)$  y calcular la nulidad y el rango de la transformación.
- c) Sea  $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Calcular las matriz cambio de base (o de transición) de  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}'$  con  $\mathcal{C}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Calcular  $[T]_{\mathcal{B}'}$ .
- d) Usando c), si  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , coordenadas en la base canónica. Calcular las coordenadas de  $T\mathbf{v}$  con respecto a la base  $\mathcal{B}'$ ,  $[T]_{\mathcal{B}'}$ .

3- Sea  $T$  la transformación lineal en  $\mathbb{R}^2$  dada por  $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$  con  $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Determinar si la transformación es diagonalizable.
- b) Calcular  $A^5$ .
- c) Calcular  $B = A^{1/3}$  es decir,  $B$  es una matriz tal que  $B^3 = A$ .



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO



## TERCER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE ALGEBRA LINEAL

NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRUPO: 2CV6

### Instrucciones:

Contesta clara, limpia y ordenadamente. No omitas ningún razonamiento. Escribe el resultado con tinta. No se permite el uso de formulario ni calculadora.

1. Considera la transformación lineal  $T: P_2 \rightarrow P_1$  definida como:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c)$$

- a) Determina si es un isomorfismo. Justifica tu resultado.
- b) Encuentra una base para el Kernel de la transformación.
- c) Encuentra una base para la imagen de la transformación.

**Valor 4 Puntos**

2. Encuentra la matriz  $Q$  que diagonaliza ortogonalmente a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y verifica que } Q^{-1}AQ = D, \text{ donde } D \text{ es una matriz diagonal}$$

cuyas componentes diagonales son los valores propios de  $A$

**Valor 4 Puntos**

3. Para la matriz  $A$  del problema anterior utiliza la diagonalización para calcular  $A^3$

**Valor 2 Puntos**