

GUÍA DE ESTUDIOS DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

Programación Lineal. Formulación de Modelos Matemáticos.

1. **Destilación de crudos.** Una compañía de petróleos produce en sus refinerías gasolina (G), gasolina sin plomo (P) y gasolina súper (S) a partir de dos tipos de crudos, C1 y C2. Las refinerías están dotadas de dos tipos de tecnologías. La tecnología nueva Tn utiliza en cada sesión de destilación 7 unidades de C1 y 12 de C2, para producir 8 unidades de G, 6 de P y 5 de S. Con la tecnología antigua Ta, se obtienen en cada destilación 10 unidades de G, 7 de P y 4 de S, con un gasto de 10 unidades de C1 y 8 de C2.

Estudios de demanda permiten estimar que para el próximo mes se deben producir al menos 900 unidades de G, 300 de P y entre 800 y 1700 de S. La disponibilidad de crudo C1 es de 1400 unidades y de C2 de 2000 unidades. Los beneficios por unidad producida son:

Gasolina	G	P	S
Beneficio / u	4	6	7

La compañía desea conocer cómo utilizar ambos procesos de destilación, que se pueden realizar total o parcialmente, y los crudos disponibles para que el beneficio sea máximo.

2. **Problema de la dieta.** En un centro de nutrición se desea obtener la dieta de costo mínimo con determinados requisitos vitamínicos para un grupo de niños que van a asistir a campamentos de verano. El especialista estima que la dieta debe contener entre 26 y 32 unidades de vitamina A, al menos 25 unidades de vitamina B y 30 de C, y a lo sumo 14 de vitamina D. La tabla nos da el número de unidades de las distintas vitaminas por unidad de alimento consumido para 6 tipos de alimentos elegidos, denominados 1, 2, 3, 4, 5 y 6, así como su costo por unidad.

Alimentos	Vitaminas				COSTO por UNIDAD
	A	B	C	D	
1	1	1	0	1	10
2	1	2	1	0	14
3	0	1	2	0	12
4	3	1	0	1	18
5	2	1	2	0	20
6	1	0	2	1	16

Se desea construir un modelo de programación lineal para conocer la cantidad de cada alimento que hay que preparar y que satisfaga los requisitos propuestos, con un costo mínimo.

3. **Elaboración de jugos.** Una empresa de alimentos, produce jugos de pera, naranja, limón, jitomate, manzana, además de otros tipos denominados H y G que son combinados de algunos de los anteriores. La disponibilidad de fruta para el periodo próximo, así como los costos de producción y los precios de venta para los jugos vienen dados en la siguiente tabla:

FRUTA	DISPONIBILIDAD MAXIMA (kg)	COSTO (\$/kg)	PRECIO DE VENTA (\$/l)
Naranja (N)	32 000	9.4	12.9
Pera (P)	25 000	8.7	12.5
Limón (L)	21 000	7.3	11.0
Jitomate (J)	18 000	4.7	8.8
Manzana (M)	27 000	6.8	9.7

Las especificaciones y precios de venta de los combinados vienen dados en la tabla siguiente:

Combinado	Especificación	Precio de Venta (\$/l)
H	No mas del 50 % de M	10.0
	No mas del 20 % de P	
	No menos del 10 % de L	
G	40 % de N	12.0
	35 % de L	
	25 % de P	

La demanda de los diferentes jugos es grande, por lo que se espera vender toda la producción. Por cada kg de fruta se produce un litro del correspondiente jugo. Determinar los niveles de producción de los 7 jugos, de manera que se tenga beneficio máximo en el periodo entrante.

4. **Compañía de neumáticos.** Una compañía se especializa en la producción de tres diferentes tipos de llantas: PREMIUM, de LUJO y REGULAR. Estas tres clases de llantas se fabrican en dos plantas diferentes (A y S) con distintas capacidades de producción.

En un día normal de trabajo (8 hrs.) la planta A produce 50 llantas PREMIUM, 80 de LUJO y 100 REGULARES; en tanto la planta B fabrica 60. 60 y 200 respectivamente.

La empresa conoce los costos diarios de operación para las dos plantas: \$ 7,500 para A y \$ 9,000 para B. La demanda mínima por periodo de cada tipo de llanta es de 2,500 para PREMIUM, 3,000 para LUJO y 7,000 para REGULAR.

¿Cómo minimizar el costo total para la compañía, satisfaciendo la demanda mínima?

5. **Empresa Industrial.** La compañía Peer fabrica 4 productos, 1 hasta 4. En la siguiente tabla se enumeran los requerimientos de materia prima, el espacio necesario de almacenamiento, las tasas de producción y las ganancias:

	1	2	3	4
Tasa de producción	2 unidades por hora	2 unidades por hora	1.5 unidades por hora	4 unidades por hora
Ganancias	2	2.5	2	1.5
Materias Primas (lbs/unidad)	15	30	10	15
Espacio (ft³/unidad)	5.00	6.50	5.00	5.50

La cantidad total de materia prima disponible por día para la producción de los 4 artículos es de 180 lbs., el espacio total disponible para almacenar es de 230 ft³, y en la producción se utilizan 5 horas al día. Formular el problema a través de P.L. para maximizar la ganancia total.

6. **Empresa de navegación.** TMM, es una empresa de navegación mexicana que posee un barco que tiene tres bodegas: una en proa, una en centro y otra en popa.

La capacidad de las bodegas es la siguiente:

BODEGA	PESO (ton)	VOLUMEN (ft ³)
PROA	2 000	100 000
CENTRO	3 000	135 000
POPA	1 500	35 000

Las características de los artículos que se desean transportar son las siguientes:

ARTÍCULO	PESO (ton/unidad)	VOLUMEN (ft ³ /unidad)	UTILIDAD (\$/unidad)
A	60	6 000	6 000
B	50	4 000	8 000
C	25	2 000	6 000

Para mantener la línea de flotación del barco, el peso en cada bodega debe ser proporcional a su capacidad en toneladas.

¿Cómo debe distribuirse la carga en el barco de tal manera que la utilidad sea máxima?

7. **Compañía almacenadora.** Una compañía de almacenes tiene 1.5 millones de dólares como capital de trabajo para uno de sus almacenes. Tres productos (1, 2 y 3) requieren 30, 3 y 15 pies cúbicos de espacio por unidad, respectivamente.

El espacio disponible es 300,000 pies cúbicos. El producto 1 cuesta \$ 12.00; el 2 \$ 4.50 y el 3 \$ 15.00, formular el problema como un problema de P.L. para determinar qué cantidad debe comprarse de cada producto, si los precios de venta son de \$15.00; \$6.00 y \$21.00 respectivamente.

8. **Formulación de una dieta alimenticia.** Un paciente ha sido restringido a una dieta especial que consta de dos fuentes alimenticias: Alimento 1 y Alimento 2. Se deben satisfacer los siguientes requerimientos nutritivos mínimos por día: 1000 unidades del nutriente A; 2000 unidades del nutriente B y 1500 unidades del nutriente C. Cada onza de alimento 1 contiene 100 unidades del nutriente A, 400 del B y 200 del C. Cada onza de alimento 2 contiene 200 unidades del nutriente A, 250 del B y 200 del C.

Ambos alimentos son costosos: \$ 6.00 USD por libra el alimento 1 y \$8.00 USD el alimento 2. Determinar las cantidades de alimentos que arroje el menor costo y que cumpla las necesidades.

El método simplex algebraico

El método simplex es un método de naturaleza matricial, fue creado como un esquema iterativo que obtiene y evalúa ingeniosamente las Soluciones Básicas Factibles (SBF) del problema de PL hasta encontrar la solución óptima.

El método simplex lleva a cabo la búsqueda de la solución óptima en tres pasos:

- 1.- Obtiene una SBF de inicio denominada solución básica factible inicial (SBFI)
- 2.- Mediante un criterio de mejorabilidad decide si la SBF actual es susceptible de mejoría.
 - a. Si la SBF es inmejorable, entonces concluye que ésta es la óptima.
 - b. Si la SBF es mejorable, entonces prescribe cómo hacerlo y va al siguiente paso.
- 3.- Utilizando un criterio de factibilidad y considerando lo prescrito en 2b, diseña una SBF que necesariamente será factible.
 - a. Si no logra diseñar una SBF, entonces concluye que el problema tiene solución ilimitada.
 - b. De lo contrario vuelve al paso 2¹.

¹ Arreola R. J. (2003). "Programación Lineal". México: Thomson Editores. p. 11.

Determinación de la solución óptima en problemas de maximización.

El desarrollo de los cálculos con el método simplex se facilita si se imponen dos requerimientos a las restricciones de PL:

1. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variables son no negativas.

Conversión de las desigualdades en ecuaciones con lado derecho no negativo. En un modelo de PL económico, el lado derecho representa la disponibilidad de un recurso, y el izquierdo el uso del recurso por todas las actividades del modelo (variables). La cantidad excedente del lado derecho respecto de izquierdo da entonces la cantidad no utilizada del recurso.

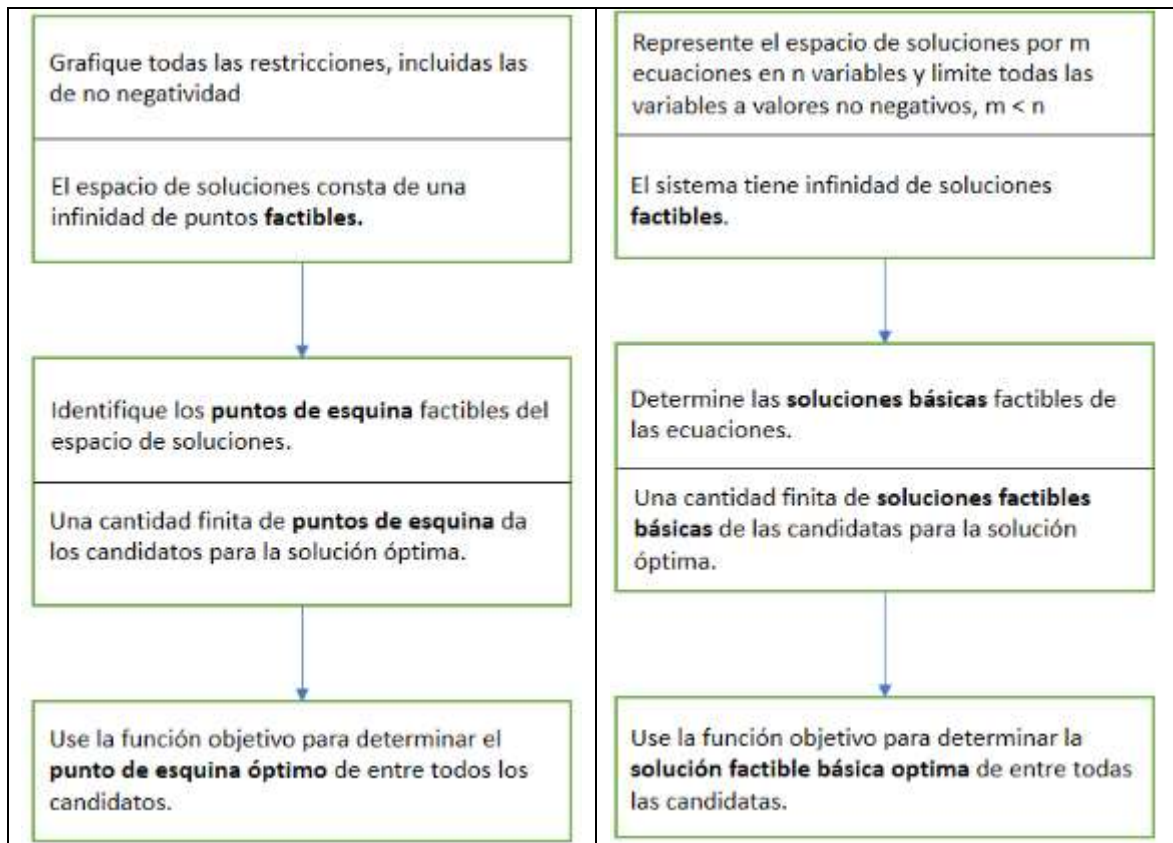
Para convertir una desigualdad ($\leq$) en ecuación se agrega una **variable de holgura** al lado izquierdo de la restricción.

La variable no negativa s_1 es la holgura (o cantidad no utilizada) del recurso M_1 .

A continuación, una restricción ($\geq$) establece un límite inferior en las actividades económicas de la programación lineal, así que la cantidad en la cual el lado izquierdo excede el límite mínimo representa un superávit. Así pues, la conversión de ($\geq$) a ($=$) se logra restando una **variable de superávit** no negativa del lado izquierdo de la desigualdad.

El único requerimiento que falta es que el lado derecho de la ecuación resultante sea no negativo. Si el lado derecho resulta negativo, el requerimiento se satisface multiplicando ambos lados de la ecuación por -1.

Método gráfico	Método algebraico(Simplex)
----------------	----------------------------

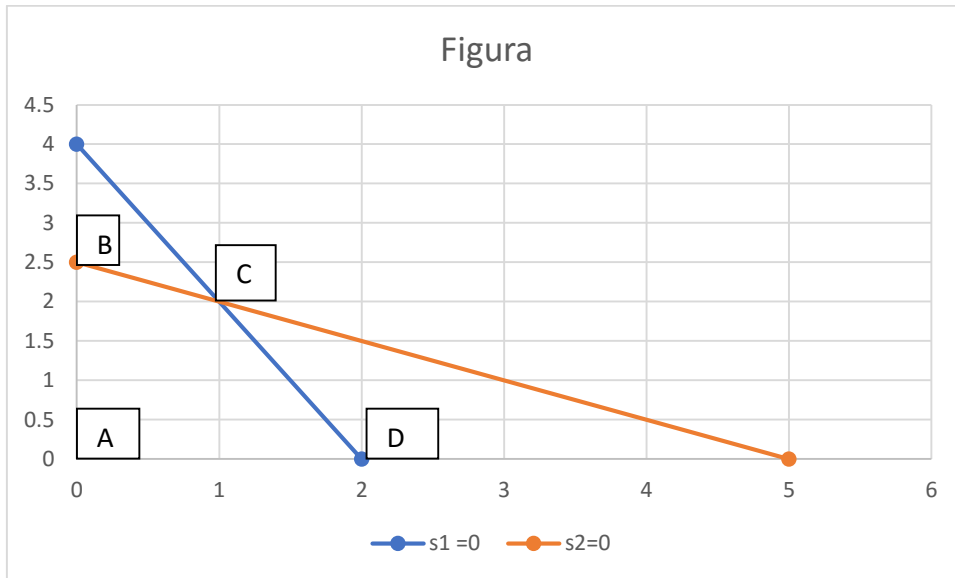


La siguiente figura muestra el espacio de soluciones de la programación lineal.

Por lo común, el método simplex se inicia en el origen, donde $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, punto A y el valor objetivo Z, es cero. La pregunta lógica es si un incremento en X_1 y/o X_2 (o ambas) no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de Z. Podemos responder esta pregunta investigando la función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Un incremento de X_1 o X_2 (o ambas) sobre sus valores actuales de cero mejorará el valor de Z. El diseño del método simplex no permite el incremento simultáneo de las variables. En cambio, incrementa una a la vez. La variable que va a aumentar es la que tenga mayor grado de mejora en Z. En el ejemplo presente, el grado de mejora del valor de Z es de 2 unidades para X_1 y de 3 para X_2 . Por lo tanto, elegimos X_2 para que crezca (la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas). La figura muestra que el valor de X_2 debe incrementarse hasta que se llegue al punto de esquina B (recordemos que no llegar al punto de esquina B no es una opción porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina). En el punto B, el método simplex incrementará el valor de X_1 para llegar al punto de esquina mejorando C, el cual es el óptimo.



Proceso iterativo del método simplex

La trayectoria del algoritmo simplex se define como $A \rightarrow B \rightarrow C$. Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una **interacción**. Es importante hacer notar que el método simplex se mueve a lo largo de **bordes** del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo, es decir irse directamente de A a C.

Detalles de cálculo del algoritmo simplex

Considere el modelo de Reddy Mikks expresado en forma de ecuación

Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 6x_1 + 4x_2 + s_1 &\leq 24 \text{ (Materia prima M1)} \\
 x_1 + 2x_2 + s_2 &\leq 6 \text{ (Materia prima M2)} \\
 -x_1 + x_2 + s_3 &\leq 1 \text{ (Limite del Mercado)} \\
 x_2 + s_4 &\leq 2 \text{ (Limite de la demanda)} \\
 x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Las variables s_1, s_2, s_3, s_4 son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación, escribimos la ecuación objetivo como

$$Z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla inicial simplex se representa como sigue:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0

Fila z

s1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila s1
s2	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila s2
s3	0	-1	1	0	0	1	0	1	Fila s3
s4	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila s4

El diseño de la tabla simplex provee automáticamente la solución en la iteración inicial. La solución se inicia en el origen $(X1, X2) = (0, 0)$, por lo que $(X1, X2)$ se definen como las variables no básicas y $(s1, s2, s3, s4)$ como las variables básicas. La variable objetivo Z y las variables básicas aparecen en la columna de la extrema izquierda (básica). Los lados derechos de las ecuaciones del modelo dan sus valores, como se muestra en la columna de la extrema derecha (solución) de la tabla; es decir, $Z = 0$, $s1 = 24$, $s2 = 6$, $s3 = 1$, $s4 = 2$. El resultado puede verse igualando las variables no básicas $(X1, X2)$ a cero en todas las ecuaciones y también observando la configuración de matriz identidad especial de los coeficientes de las variables básicas (todos los elementos en las diagonales son 1, y para todos los elementos fuera de las diagonales son 0).

¿Es óptima la solución inicial? La función objetivo $Z = 5X1 + 4X2$ muestra que la solución puede mejorarse si se incrementa el valor de la variable $X1$ o de la $X2$ no básica por encima de cero.

Siguiendo el argumento $X1$ tiene que incrementarse porque tiene el coeficiente objetivo más negativo en la ecuación objetivo. Esta regla define la llamada **condición de optimalidad simplex**. En la terminología del algoritmo simplex, $X1$ se conoce como la **variable de entrada** porque ingresa a la solución básica.

Si $X1$ es la variable de entrada, una de las variables básica actuales debe salir; es decir se vuelve no básica a un nivel cero (recordamos que la cantidad de variables no básicas debe ser siempre $n - m$). La mecánica para determinar la **variable de salida** implica calcular las **relaciones** del lado derecho de las ecuaciones (columna solución) con los coeficientes de restricción estrictamente positivos (imposibilitando así al cero) bajo la variable de entrada, $X1$ como se muestra en la siguiente tabla:

Básica	x1	Solución	Relación (o intersección)
s1	6	24	$X1 = 24 / 6 = 4 \leftarrow$ mínimo
s2	1	6	$X1 = 6 / 1 = 6$
s3	-1	1	$X1 = 1 / -1 = -1$ (denominador negativo, ignorar)
s4	0	2	$X1 = 2 / 0 = \infty$ (denominador cero, ignorar)
Conclusión: x1 entra (en el nivel 4) y x2 sale (en el nivel cero)			

¿Cómo determinan las relaciones calculadas la variable de salida y el valor de la variable de entrada? La figura muestra que las relaciones calculadas son en realidad las intersecciones de las líneas de restricción con el eje $X1$ (variable de entrada). Podemos ver que el valor de $X1$ debe incrementarse hasta la intersección no negativa mínima con el eje $X1$ ($4=$) para alcanzar el punto de esquina B . Cualquier incremento más allá de B no es factible. En el punto B, la variable básica actual $s1$ asociada con las restricciones 1 asume un valor de cero y se transforma en la variable de salida. La regla asociada con las

El nuevo punto de solución B se determina “intercambiando” la variable de entrada x_1 y la variable de salida s_1 en la tabla simplex para obtener

Variables básicas en B: (x_1, s_2, s_3, s_4)

A line graph with four linear functions plotted on a coordinate plane. The x-axis ranges from -2 to 7, and the y-axis ranges from 0 to 7. The functions are labeled 1, 2, 3, and 4 in the legend below the graph.

- Line 1 (blue) passes through the points $(-1, 0)$ and $(4, 4)$.
- Line 2 (orange) is a horizontal line passing through the points $(-0.5, 2)$ and $(4.5, 2)$.
- Line 3 (gray) passes through the points $(0, 3)$ and $(6, 0)$.
- Line 4 (yellow) passes through the points $(0, 6)$ and $(4, 0)$.

- La interacción de la columna pivote y la fila pivote se conoce como **elemento pivote**. La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

		Entra								
		Básica	z	x1	x2	s1	s2	s3	s4	Solución
sale	z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	Fila z
	s1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila pivote
	s2	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila s2
	s3	0	-1	1	0	0	1	0	1	Fila s3
	s4	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila s4
		Columna pivote								

Los cálculos de Gauss- Jordán necesarios para obtener la nueva solución básica son dos tipos.

La nueva solución básica es (x_1, s_2, s_3, s_4) , y la nueva tabla es:

↓									
Básica	z	s1	x2	s1	s2	s3	s4	Solución	
z	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20	
x1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4	
← s2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2	
s3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5	
s4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Observe que la estructura de la nueva tabla es similar a la de la tabla inicial, en el sentido de que los coeficientes de las restricciones de la variable básica forman una matriz de identidad. Por consiguiente cuando igualamos las nuevas variables no básicas x_2 y s_1 a cero la columna solución de forma automática de la nueva solución ($x_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$)³. Este “acondicionamiento” de la tabla es el resultado de la aplicación de las operaciones de filas de Gauss-Jordan. El nuevo valor objetivo es $Z = 20$, el cual es consistente con

Nueva $Z =$ Anterior $Z +$ Nuevo valor $X_1 \times$ su coeficiente objetivo

$$= 0 + 4 \times 5 = 20$$

Por otra parte, $Z = 4 \times$ valor de $x_1 + 0 \times$ valor de $s_2 + 0 \times$ valor de $s_3 + 0 \times$ valor de $s_4 = 4 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 5 + 0 \times 2 = 20$.

En la última tabla, la *condición de optimalidad* muestra que X_2 es la variable de entrada. La condición de factibilidad produce la siguiente información:

Básica	z	s1	s2	s1	s2	s3	s4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
X1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3

x2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

Según la condición de optimilidad, ninguno de los coeficiente de la fila Z son negativos. De ahí que la última tabla sea óptima.

La solución óptima puede leerse en la tabla simplex de la siguiente manera. Los valores óptimos de las variables en la columna *Basic* aparecen en la columna *Solución* del lado derecho y se interpretan como sigue:

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
X_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
X_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
Z	21	La utilidad diaria es de \$21,000

La solución también da el estado de los recursos. Un recurso se designa como **escaso** si la variable de holgura asociada es cero, es decir, las actividades (variables) del modelo consumieron el recurso por completo. De lo contrario, si la holgura es positiva, entonces el recurso es **abundante**. La siguiente tabla clasifica las restricciones del modelo:

Recurso	Valor de holgura	Estado
Materia prima, M_1	$S_1 = 0$	Escaso
Materia prima, M_2	$S_2 = 0$	Escaso
Límite del mercado	$S_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de la demanda	$S_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

Comentarios. La tabla simplex ofrece mucha información adicional que incluye lo siguiente:

1. *Análisis de sensibilidad*, el cual determina las condiciones que mantendrán la solución actual sin cambios.

2. *Análisis postóptimo*, el cual determina la nueva solución óptima cuando cambian los datos del modelo.

2.1.1 Los problemas de minimización: uso de variables artificiales.

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso de maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que $\text{Max } Z$ equivale a $\text{mín } (-z)$. En cuanto a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila Z. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila Z son negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la relación mínima no negativa con el denominador *estrictamente positivo*. Los vínculos se rompen arbitrariamente.

Operaciones de filas de Gauss-Jordan

1. Fila pivote

- a. Reemplace la variable de entrada en la columna *Básica* con la variable de entrada.
- b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual $\div$ Elemento pivote

2. Todas las demás filas, incluida la z

Nueva fila = (Fila actual) - (Su coeficiente en la columna pivote) X (Nueva fila pivote).

Los pasos del método simplex son

Paso 0. Determine la solución factible básica inicial.

Paso 1. Seleccione una *variable de entrada* utilizando la condición de optimalidad.

Deténgase si no hay variable de entrada; la última condición es óptima. De otro modo, prosiga con el paso 2.

Paso 2. Seleccione una *variable de salida* utilizando la condición de factibilidad.

Paso 3. Aplique los cálculos de Gauss-Jordan para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1.

Taha, H. (2003). "Investigación de Operaciones". (7ª edición). México: Pearson. Prentice Hall. p. 72-81

El método de variables artificiales.

Como se demostró en el ejemplo, las PL en las que todas las restricciones son ($\leq$) con lados derecho no negativos ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones ($=$) o ($\geq$) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar PLs de “mal comportamiento” con restricciones ($=$) y ($\geq$) es utilizar **variables artificiales** que desempeñan el papel de holguras en la primera iteración, y que luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: el método M, y el método de dos fases.

Método M

El método M se inicia con la PL en forma de ecuación. Si la ecuación i no tiene una holgura (o una variable que pueda desempeñar el papel de una), se agrega una variable artificial, R_i , para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere un “artificio” de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima (suponiendo que el problema tenga una solución factible). La meta deseada se logra *penalizando* estas variables en la función objetivo utilizando la siguiente regla:

Regla de penalización para variables artificiales

Dado M , un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente ($M \rightarrow \infty$)), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** apropiada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\text{Minimizar } Z = 4X_1 + X_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Si utilizamos X_3 como variable de superávit en la segunda restricción y X_4 como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } Z = 4X_1 + X_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, X_4 , pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y las penalizaciones en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La solución básica inicial es $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$

Desde un punto de vista de cálculo, la solución del problema con la computadora requiere que reemplace M con un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, M se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad agregada innecesaria la cual puede evitarse sustituyendo un valor numérico apropiado en lugar de M (lo que de cualquier modo tenemos que hacer cuando usamos la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar M algebraicamente y utilizar una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de M debemos utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización M debe ser lo bastante grande *con respecto a los coeficientes objetivos originales* para forzar a las variables originales a ser cero en la solución óptima. Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PLs, no es conveniente que M sea innecesariamente grande ya que ello nos puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de X_1 y X_2 son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer $M = 100^5$.

Utilizando $M = 100$ la tabla simplex de inicio se da como sigue (por comodidad, la columna Z se elimina porque no cambia en todas las iteraciones):

Básica	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solución
z	-4	-1	0	-100	-100	0	0

R ₁	3	1	0	1	0	0	3
R ₂	4	3	-1	0	1	0	6
X ₄	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila Z debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila z en la tabla en este momento muestra $Z = 0$. Sin embargo, dada la solución no básica $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, la solución básica actual es $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $X_4 = 4$, la cual da $Z = 100 \times 3 + 100 \times 6 + 4 \times 0 = 900$. Esta inconsistencia se deriva del hecho de que los coeficientes de R_1 y R_2 no son cero (-100, -100) en la fila Z (compare con la solución de inicio total holgura en el ejemplo, donde los coeficientes en la fila z de las holguras son cero).

Para eliminar la inconsistencia, tenemos que sustituir R_1 y R_2 en la fila Z por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila Z} = \text{Anterior fila Z} + (100 \times \text{fila } R_1 + \text{fila } R_2)$$

(Esta operación es la misma que sustituir $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ y $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$ en la fila z.)

Por tanto, la tabla modificada es:

Básica	X ₁	X ₂	X ₃	R ₁	R ₂	X ₄	Solución
z	696	399	-100	0	0	0	900
R ₁	3	1	0	1	0	0	3
R ₂	4	3	-1	0	1	0	6
X ₄	1	2	0	0	0	1	4

El resultado es que R_1 y R_2 ahora se sustituyen (tienen coeficientes cero) en la fila Z con $Z = 900$, como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex. Dado que la función objetivo se minimiza, la variable X_1 que tiene el coeficiente más positivo en la fila Z (=696) entra en la solución. La relación mínima de la condición de factibilidad específica a R_1 como la variable de salida.

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las conocidas operaciones de Gauss-Jordan.

Básica	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solución
z	0	167	-10 0	-232	0	0	204
R_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	40	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
X_4	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que X_1 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $z = \frac{17}{5}$.

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

Comentarios. El uso de la penalización M forzará la variable artificial a cero en la iteración simplex final si la PL no tiene una solución factible (es decir, las restricciones no pueden satisfacerse al mismo tiempo). En este caso, la iteración simplex final incluirá al menos una variable artificial con un valor positivo².

Ejercicios propuestos:

Resuelva por el método gráfico los siguientes problemas e indique qué tipo de solución es la que presenta cada problema:

$$\text{Mín } Z = 3X_1 - 2X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 2X_2 \geq 4$$

$$X_1 + X_2 \geq 4$$

$$-3X_1 + 3X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

² Taha, H. (2003). *"Investigación de Operaciones"*. (7ª edición). México: Pearson. Prentice Hall. p. 89-92.

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$2X_1 + 3X_2 = 12$$

$$2X_1 + X_2 \geq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 \geq 1$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$-1/2X_1 + X_2 \geq -1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_1 - 3X_2 \leq 2$$

$$X_1 - X_2 \leq 3$$

$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$3X_1 + 5X_2 \geq 50$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resuelva por el método simplex el siguiente problema:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 - X_2 \leq 4$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Resuelva por el método simplex de las M o de penalización el siguiente problema:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 = 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelos de redes y de transporte

Una red se define mediante dos conjuntos de símbolos: nodos y arcos.

Nodo:  Circulo de una red que puede representar una fábrica, un almacén, etc., hacia donde es necesario hacer llegar un material o servicio.

Arco:  Línea de una red de distribución que conecta un par de nodos. Un arco consiste en un par ordenado de puntos extremos y representa una posible dirección de movimiento que podría ocurrir entre puntos extremos (o vértices).

Una red consta de un conjunto de nodos conectados por arcos o ramas. Asociado a cada rama se tiene un flujo de algún tipo (por ejemplo, el flujo de petróleo en una red de oleoductos y el tráfico en una red de transporte). En general, el flujo en una rama está limitado por su capacidad que puede ser finita o infinita.

Los problemas de flujo en redes

El tema de flujo en redes es muy amplio y tiene muchas aplicaciones: redes de distribución eléctrica, de comunicación, etc. De entre los diferentes problemas posibles, tenemos los problemas de flujo máximo, ruta más corta, etc.

Características.

- Al menos uno de los nodos es un nodo fuente.
- Al menos uno de los nodos es un nodo demanda.
- El resto de los nodos son nodos de trasbordo.
- Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección en que indica la flecha.
- La red tiene suficientes arcos con suficiente capacidad.

El problema del árbol de extensión mínima

Implica conectar todos los puntos de una red al mismo tiempo que se minimiza la distancia para conectarlos.

Considere la situación donde se desea crear una red de caminos pavimentados para conectar un cierto número de poblaciones rurales. Debido a limitaciones presupuestales, el número de kilómetros de caminos por construirse debe ser el mínimo absoluto que permita la conexión directa o indirecta del tráfico entre las diferentes poblaciones.

La situación anterior se puede representar por una red donde las poblaciones representan nodos y los caminos propuestos representan ramas. El modelo resultante es característico del problema del árbol de extensión mínima, donde se desea determinar el árbol extenso que proporciona la suma mínima de ramas conectoras.

Para resolver este problema se utiliza el algoritmo de KRUSKAL:

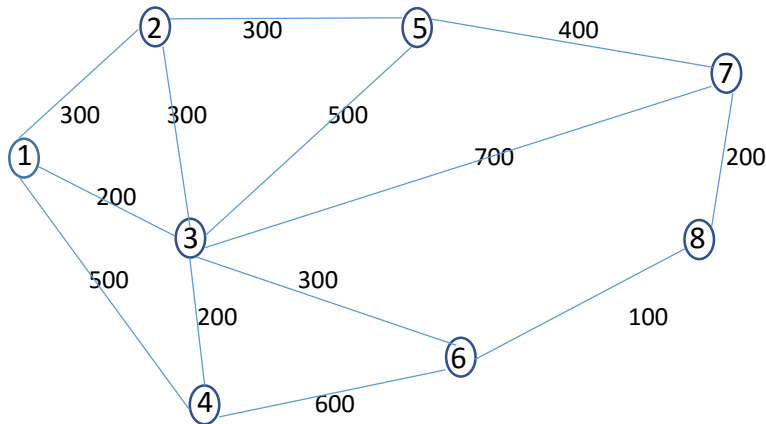
- 1.- Comenzar en forma arbitraria en cualquier nodo y conectarlo con el nodo más próximo (menos distante).
- 2.- Identificar el nodo no conectado que esté más cerca de alguno de los nodos conectados. Deshacer los empates de forma arbitraria. Agregar este nodo al conjunto de nodos conectados.

Repetir este paso hasta que se hayan conectado todos los nodos.

$n-1$ = número de arcos.

Ejemplo:

Considere la Lauderdale Construction Company, la que en la actualidad está desarrollando un lujoso proyecto residencial en City Beach, Florida. La empresa debe determinar la forma más barata de suministrar agua y electricidad a cada casa. La red de casas se muestra en la figura:



Como se ve en esta figura hay ocho casas en el golfo. La distancia entre cada una de ellas en cientos de pies se muestra en la red. La distancia entre las casas 1 y 2, por ejemplo, es de 300 pies. Utilizar la técnica del árbol de extensión mínima para determinar la distancia mínima que puede ser utilizada para conectar todos los nodos.

La distancia total se encuentra sumando las distancias de los arcos utilizados. En este ejemplo, la distancia menor son 1,600 pies³.

Los problemas de flujo máximo.

Muchas situaciones se modelan mediante una red en la que se podría considerar que los arcos tienen una capacidad que limita la cantidad de un producto que se podría enviar a través del arco. En estas situaciones, a menudo se desea transportar la cantidad máxima de flujo de un punto de partida (conocido como fuente) a un punto terminal (llamado destino). Esta clase de problemas se llaman problemas de flujo máximo.

Supuestos para un problema de flujo máximo:

- 1.- Todo el flujo que atraviesa la red se origina en un nodo, al que se denomina

³ Render, B. (2006). *"Métodos Cuantitativos para los Negocios"*. (9ª edición). México: Pearson. p. 498 – 501.

fuelle, y termina en otro, al que se llama destino.

2.- Sólo se permite el flujo a través de un arco en la dirección que indica la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad de ese arco.

3.- El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo que proviene de la fuente y que va al destino. Esta cantidad está medida en cualquiera de dos formas equivalentes: la cantidad que deja la fuente, o la cantidad que ingresa en el destino⁴.

Pasos del algoritmo:

1.- Encontrar un camino que vaya del origen al destino y que tenga capacidad mayor a cero en el sentido deseado.

2.- Encontrar la rama de menor capacidad (Pf) del camino seleccionado en el paso anterior y programar el envío de dicha capacidad (Pf).

3.- Para el camino elegido en el paso 1 reducir la cantidad (Pf) en las ramas involucradas y aumentar dicha cantidad en el sentido contrario.

4.- Repetir el procedimiento desde el paso 1.

Ejemplo:

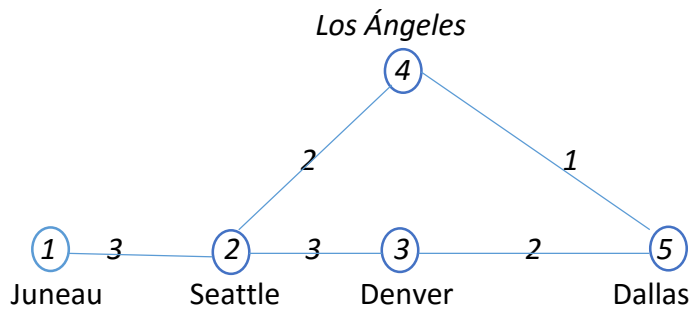
Las aerolíneas Fly-by-Night deben determinar cuántos vuelos de conexión diarios se pueden concretar entre Juneau, Alaska y Dallas, Texas. Los vuelos de conexión deben detenerse en Seattle y después parar en Los Ángeles o Denver. Debido al espacio de aterrizaje limitado, Fly-by-Night está limitado a hacer el número de vuelos diarios entre los pares de ciudades que se muestran en la tabla. Establezca un problema de flujo máximo cuya solución le permita saber a la aerolínea cómo maximizar el número de vuelos de conexión diarios de Juneau a Dallas.

Capacidades de arco para las aerolíneas Fly-by-Night

Ciudades	Número máximo de vuelos diarios
Juneau – Seattle (J, S)	3
Seattle – Los Ángeles (S, L)	2
Seattle – Denver (S, De)	3
Los Ángeles – Dallas (L, D)	1

⁴ Hillier, F. S. (1997). *"Introducción a la Investigación de Operaciones"*. México: McGraw-Hill. p.195-196.

Denver – Dallas (De, D)	2
-------------------------	---

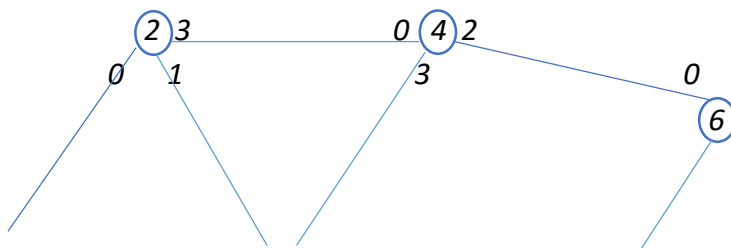


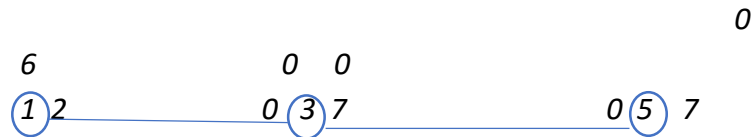
ITERACIÓN	CAMINO SELECCIONADO	PF	FLUJO TOTAL DESPUÉS DE LA ITERACIÓN
1	1-2-4-5	1	1
2	1-2-3-5	2	3

Aquí, la capacidad del arco (i, j) es el número máximo de vuelos diarios entre la ciudad i y la ciudad j . La solución óptima es = 3. Así, Fly-by-Night puede enviar tres vuelos diarios que conectan a Juneau y Dallas. Un vuelo conecta vía Juneau – Seattle – Los Ángeles – Dallas y dos vuelos conectan vía Juneau – Seattle – Denver – Dallas.

Ejemplo:

Sunco Oil quiere enviar la máxima cantidad posible de petróleo (por hora) vía tubería del nodo de inicio (nodo 1) al nodo final (nodo 6). Los distintos arcos representan tuberías de diferentes diámetros. El número máximo de barriles de petróleo (millones de barriles por hora) que se bombean por cada arco se muestran en el diagrama. Cada número se llama una capacidad de arco. Determine el número máximo de barriles de petróleo por hora que pueden enviarse del nodo de inicio al nodo final.





ITERACIÓ N	CAMINO SELECCIONA DO	PF	FLUJO TOTAL DESPUÉS DE LA ITERACIÓ N
1	1-2-4-6	(4-6) 2	2
2	1-2-4-3-5-6	(2-4) 1	3
3	1-2-3-5-6	(2-3) 1	4
4	1-3-5-6	(1-3) 2	6

El flujo total máximo es de 6 millones de barriles de petróleo por hora⁵.

Ejercicio propuesto:

Hexxon Oil Company tiene una gran refinería localizada en Newark, New Jersey. La gasolina refinada es enviada de allí a tanques de almacenamiento en Filadelfia a través de una red de oleoductos con estaciones de bombeo en Sayerville, Easton, Trenton, Bridgewater y Allentown. El oleoducto de cada segmento existe un número máximo conocido de galones por hora que pueden enviarse. Esos segmentos y sus respectivas capacidades en galones por hora son:

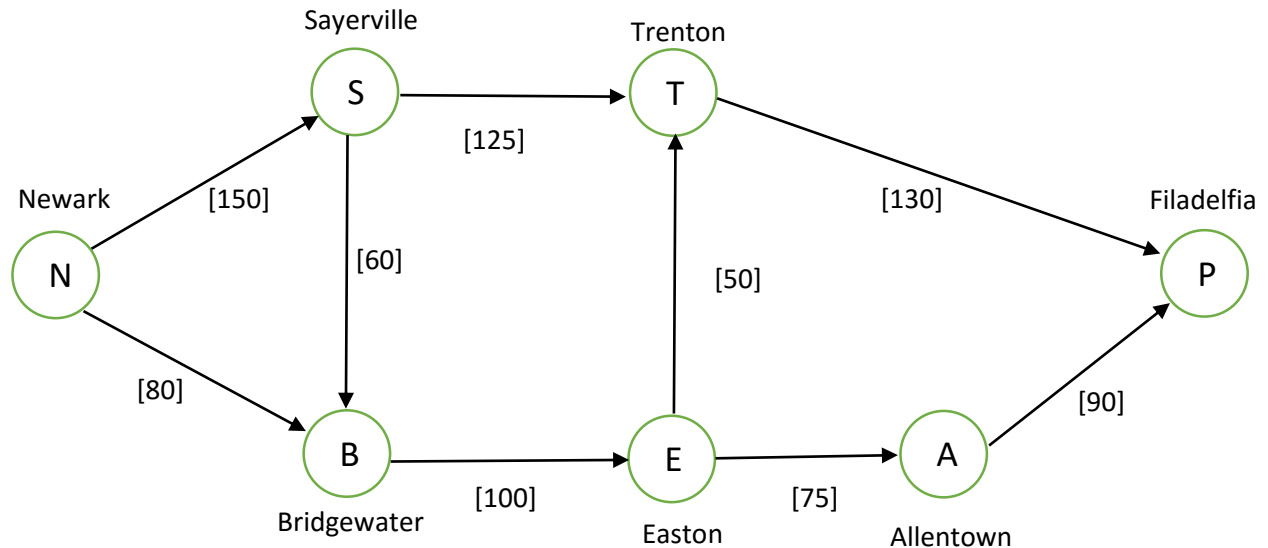
DE	A	CAPACIDAD
Newark	Sayerville	150 000
Sayerville	Trenton	125 000
Trenton	Filadelfia	130 000
Newark	Bridgewater	80 000
Sayerville	Bridgewater	60 000
Bridgewater	Easton	100 000
Easton	Allentown	75 000
Easton	Trenton	50 000
Allentown	Filadelfia	90 000

En la región de Filadelfia se espera un aumento en la conducción en los próximos meses de verano. ¿Tendrá Hexxon suficiente gasolina para satisfacer la mayor demanda en las estaciones de servicio? Antes de incrementar la tasa de producción de la refinería, la administración de Hexxon desea conocer el número máximo de galones de gasolina por

⁵ Wayne L. (2005). "Investigación de Operaciones" (4ª edición). México: Thomson. p. 420-422.

hora que pueden enviarse a través de la red de oleoductos a los tanques de almacenamiento de Filadelfia.

Antes de formular este problema matemáticamente, considere el dibujo de un diagrama de redes que le ayude a visualizar la información y los datos del problema. Primero identifique ciertos nodos y arcos. En este problema, cada lista de ciudades puede representarse mediante un nodo. Para conectar esas ciudades para las que existe un seguimiento de la red de oleoductos se utiliza un arco. Allí también puede ver la capacidad de cada segmento escrita junto al arco correspondiente.



*En miles de galones por hora

Planeación y control de proyectos: Método de la Ruta Crítica (CPM) y Técnica de Evaluación y Revisión de Programas (PERT).

El CPM (Critical Path Method) y el PERT (Program Evaluation and Review Technique) son métodos basados en redes, diseñados para ayudar en la planificación, la programación y el control de proyectos. Un proyecto se define como una colección de actividades interrelacionadas, en la cual cada actividad requiere tiempo y recursos. El objetivo del CPM y de PERT es proporcionar medios analíticos para programar las actividades. Primero, definimos las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y relaciones de precedencia entre las actividades. El tercer paso implica hacer cálculos específicos de red que faciliten el desarrollo del programa de tiempo para el proyecto.

Las dos técnicas, CPM y PERT, que se desarrollaron independientemente, difieren en el sentido de que el CPM supone duraciones deterministas de la actividad. PERT, a la inversa, supone duraciones probabilísticas.

Representación de la red.

Cada actividad del proyecto se representa por medio de un acto direccional (más comúnmente conocido como flecha), que apunta en dirección del progreso en el proyecto.

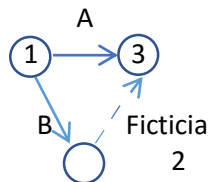
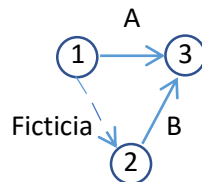
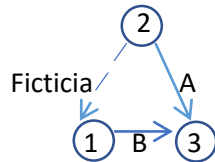
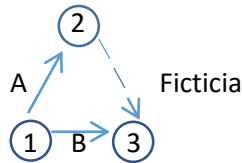
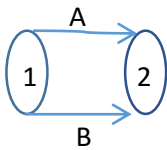
Los nodos de la red (que también se conocen como eventos) establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades del proyecto.

Hay tres reglas para construir la red:

Regla 1. Cada actividad está representada por una y solo una flecha en la red.

Regla 2. Cada actividad se debe identificar por medio de dos nodos finales distintos.

La figura muestra cómo se puede utilizar una actividad ficticia para representar dos actividades concurrentes, A y B. por definición, una actividad ficticia, que normalmente se representa por una flecha de líneas punteadas, no consume tiempo ni recursos. Al insertar una actividad ficticia en una de las cuatro formas que se muestran en la figura, mantenemos la concurrencia de A y B y proporcionamos nodos finales únicos para las dos actividades concurrentes.



Regla 3. Para mantener las relaciones de precedencia correctas, se deben responder las siguientes preguntas, a medida que se añade cada actividad a la red.

- ¿Qué actividades deben preceder inmediatamente a la actividad actual?
- ¿Qué actividades deben seguir a la actividad actual?

c) ¿Qué actividades deben ocurrir concurrentemente con la actividad actual?

Calculo de la ruta crítica:

El resultado final en el CPM es la construcción del programa de tiempo para el proyecto. Para lograr este objetivo de una manera conveniente, hacemos cálculos especiales que producen la siguiente información:

1. Duración total necesaria para completar el proyecto.
2. Categorización de las actividades del proyecto como críticas y no críticas.

Se dice que cualquier **actividad es crítica** cuando no hay “libertad” para determinar los tiempos de inicio y terminación. Como tal, para completar el proyecto sin demora, cada actividad crítica se debe iniciar y terminar a tiempo.

Una **actividad no crítica** permite cierta holgura en la programación, de manera que el tiempo de iniciar la actividad se puede adelantar o demorar dentro de ciertos límites, sin afectar la fecha de terminación de todo proyecto.

Para realizar los cálculos necesarios, definimos un **evento** como un punto en el tiempo en el cual se terminan ciertas actividades y se inician otras. En términos de la red, el evento corresponde a un nodo. Después, introducimos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \square_j &= TIP \text{ (Tiempo de Inicio Más Próximo)} \\ \Delta_j &= TTT \text{ (Tiempo de Terminación más Tardío)} \\ D_{ij} &= \text{Duración de la actividad } (i, j) \end{aligned}$$

Las definiciones de las primeras y las últimas ocurrencias del evento j se especifican en relación con las fechas de inicio y terminación de todo el proyecto

Los cálculos de la ruta crítica implican dos pasos: el paso hacia adelante determina los primeros tiempos de ocurrencia de los eventos y el paso hacia atrás calcula sus últimas fechas de ocurrencia.

Paso hacia adelante (primeras fechas de ocurrencia, TIP). En este paso, los cálculos empiezan en el nodo 1 y avanzan recursivamente hacia el nodo final n .

Paso inicial. Determine $TIP_1 \equiv 0$ para indicar que el proyecto empieza en la fecha 0.

Paso general j . Dado que los nodos $p, q, \dots$, y v están unidos directamente con el nodo j por las actividades de entrada (p, j) , (q, j) , ..., y v ya se han calculado, entonces la primera fecha de ocurrencia del evento j se calcula como:

$$TIP_j = \max\{TIP_p + D_{pj}, TIP_q + D_{qj}, \dots, TIP_v + D_{vj}\}$$

El paso adelante está completo cuando se calcula TIP_n en el nodo n . Por definición, TIP_j representa la ruta (duración) más larga al nodo j .

Paso hacia atrás (últimas fechas de ocurrencia, TTT). Después de la terminación del paso hacia adelante, los cálculos del paso hacia atrás empiezan en el nodo n y regresan recursivamente al nodo 1.

Paso inicial. Determinar $TTT_n \equiv TIP_n$ para indicar que la primera y la última ocurrencia del último acontecimientos del proyecto son las mismas.

Paso general j. Dado que los nodos $p, q, \dots$, y v están unidos directamente al nodo j por las actividades de salida (j, p) , (j, q) , ..., y (j, v) y que las últimas fechas de ocurrencia de los eventos (nodos) $p, q, \dots$, y v ya se han calculado, entonces la última fecha de ocurrencia del evento j se calcula como:

$$TTT_j = \min\{TTT_p - D_{jp}, TTT_q - D_{jq}, \dots, TTT_v - D_{jv}\}$$

El paso hacia atrás está completo cuando se calcula TTT_1 en el nodo 1.

Basándonos en los cálculos anteriores, una actividad (i, j) será crítica si satisface tres condiciones.

1. $TTT_i = TIP_i$
2. $TTT_j = TIP_j$
3. $TTT_j - TTT_i = TIP_j - TIP_i = D_{ij}$

Las tres condiciones plantean que la primera y la última fecha de ocurrencia de los eventos finales i y j son iguales y que la duración D_{ij} ocupa exactamente su lapso. Por tanto, una actividad que no satisface las tres condiciones es no crítica.

Las actividades críticas de una red deben constituir una ruta ininterrumpida que abarca toda la red de principio a fin.

Método de la Ruta Crítica (CPM)

El propietario de Shopping Center planea modernizar y expandir el complejo actual de 32 locales de negocios del centro comercial, se espera que el proyecto proporcione espacio para ocho o diez locales nuevos. El propietario del centro comercial debe planear, programar y controlar el proyecto.

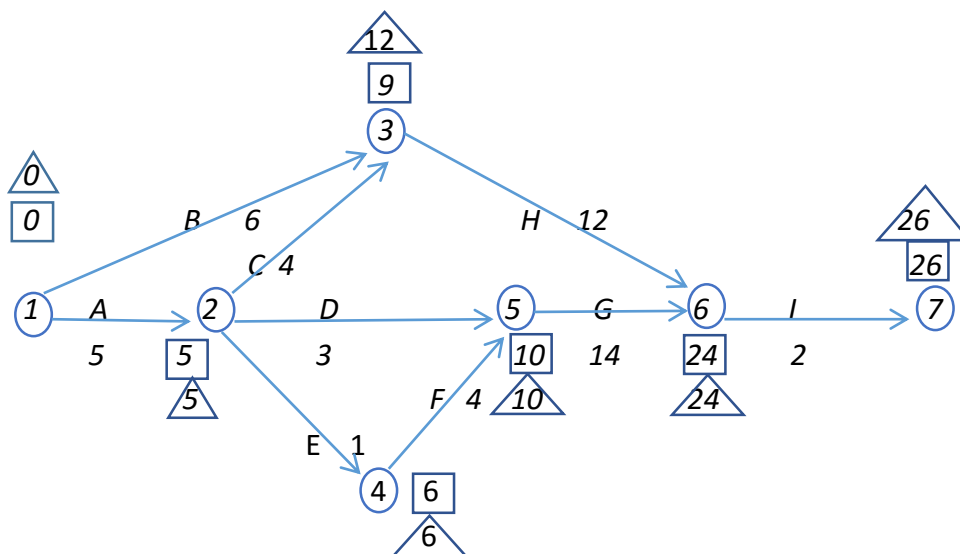
El primer paso en el proceso es elaborar una lista de las actividades que conforman el proyecto, la precedencia de cada una de las actividades y el tiempo de duración de cada actividad.

Actividad	Descripción de la actividad	Predecesora inmediata	Tiempo de la actividad
A	Preparar planos arquitectónicos	-	5
B	Identificar nuevos arrendatarios potenciales	-	6
C	Elaborar folletos informativos para los arrendatarios	A	4
D	Seleccionar contratista	A	3
E	Preparar permisos de construcción	A	1
F	Obtener aprobación +para los permisos de construcción	E	4
G	Realizar la construcción	D, F	14
H	Finalizar contratos con arrendatarios	B, C	12
I	Mudanza de los arrendatarios	G, H	2

Para determinar el tiempo en que se completa el proyecto debemos analizar la red e identificar la ruta crítica.

Determinación de la ruta crítica:

Comenzamos por encontrar el tiempo de inicio más temprano y el tiempo de inicio más tardío para todas las actividades en la red.



Considera la figura anterior, la cual comienza en el nodo 1 y termina en el nodo 7. El tiempo requerido para ejecutar cada actividad se indica en las flechas.

Por consiguiente:

$$TIP_1 = 0$$

$$TIP_2 = 5$$

$$TIP_3 = 9$$

$$TIP_4 = 6$$

$$TIP_5 = 10$$

$$TIP_6 = 24$$

$$TIP_7 = 26$$

En la segunda fase, llamada **cálculos hacia atrás**, comienzan los cálculos desde el nodo de terminación y se avanza hacia el nodo de inicio. El objetivo de esta fase es calcular TTT_j = Tiempo de terminación más tardío.

Por consiguiente, si $i = n$ es el evento de "terminación", $TTT_n = TIP_n$

$$TTT = \triangle$$

Por lo tanto:

$$TTT_7 = 26$$

$$TTT_6 = 24$$

$$TTT_5 = 10$$

$$TTT_4 = 6$$

$$TTT_3 = 12$$

$$TTT_2 = 5$$

$$TTT_1 = 0$$

Ahora pueden identificarse las actividades de la ruta crítica usando los resultados de los cálculos hacia adelante y hacia atrás. Una actividad (i,j) está en la ruta crítica si satisface las tres condiciones siguientes:

$$TIP_i = TTT_i$$

$$TIP_j = TTT_j$$

$$TIP_j - TIP_i = TTT_j - TTT_i = D_{ij}$$

La ruta crítica es:

A- E- F- G -I

Se dice que una **actividad es crítica** si una demora en su comienzo causará una demora en la fecha de terminación del proyecto completo.

Una **actividad no crítica** es tal que el tiempo entre su comienzo de inicio más próximo y de terminación más tardío (como lo permita el proyecto) es más grande que su duración real. En este caso, se dice que la actividad no crítica tiene un tiempo de holgura.

Una **ruta crítica** define una cadena de actividades críticas, las cuales conectan los eventos inicial y final del diagrama de flechas. En otras palabras, la ruta crítica identifica todas las actividades críticas del proyecto⁶.

PERT/costo.

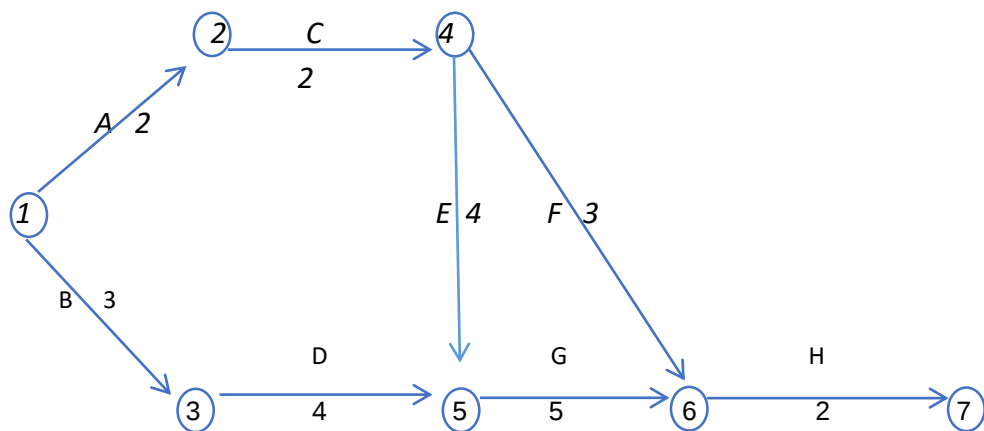
PERT/costo le permite a un administrador planear, programar, supervisar y controlar tanto tiempos como costos.

PROBLEMA PROPUESTO:

Activ	Activ precedente	Tiempo Normal (sem)	Tiempo Urgencia (sem)	Costo Normal (\$)	Costo Urgencia (\$)	Costo de Reducción Por semana
A	-	2	1	22,000	23,000	1,000
B	-	3	1	30,000	34,000	2,000
C	A		1	26,000	27,000	1,000
D	B	4	3	48,000	49,000	1,000
E	C	4	2	56,000	58,000	1,000
F	C	3	2	30,000	30,500	500
G	D,E	5	2	80,000	86,000	2,000
H	F,G	2	1	16,000	19,000	3,000
				Σ\$308,000		

- 1.- ¿Cuál es la red de actividades para este proyecto?
- 2.- Identificar la ruta y el tiempo del camino crítico.
- 3.- ¿Cuál es el costo marginal por concluir el proyecto en 13 semanas?
- 4.- La gerencia de la empresa desea terminar en el menor tiempo el proyecto, ¿Cuál es el menor tiempo para concluir el proyecto?, ¿Cuál es en dicha circunstancia, el costo total?

⁶ Anderson, D. (2004). "Métodos Cuantitativos para los Negocios". (9ª edición). México: Cengage Learning Editores. p. 515 - 521.



Ruta crítica:

A- C- E- G- H

$2+2+4+5+2 = 15$ semanas

Costo marginal por concluir el proyecto en 13 semanas: \$3,000

Duración del proyecto	Costo marginal (\$)	Costo total el proyecto (\$)
15 semanas	-	308,000
14 semanas	1,000	309,000
13 semanas	2,000	311,000
12 semanas	2,000	313,000
11 semanas	2,000	315,000
10 semanas	2,000	317,000
9 semanas	3,000	320,000
8 semanas	3,000	323,000
7 semanas	3,000	326,000
	Σ\$18,000	

PROBLEMA PROPUESTO:

Actividad	Actividad precedente	Tiempo Normal (sem)	Tiempo Urgencia (sem)	Costo Normal (\$)	Costo Urgencia (\$)	Costo de Reducción Por semana
A	-	3	2	1,000	1,600	600
B	-	2	1	2,000	2,700	700
C	-	1	1	300	300	-
D	A	7	3	1,300	1,600	75
E	B	6	3	850	1,000	50
F	C	2	1	4,000	5,000	1,000
G	D,E	4	2	1,500	2,000	250
				Σ\$10,950		

- 1.- ¿Cuál es la red de actividades para este proyecto?
- 2.- Identificar la ruta y el tiempo del camino crítico.
- 3.- ¿Cuál es el costo marginal por concluir el proyecto en 10 semanas?
- 4.- La gerencia de la empresa desea terminar en el menor tiempo el proyecto, ¿Cuál es el menor tiempo para concluir el proyecto?, ¿Cuál es en dicha circunstancia, el costo total?

PERT/probabilístico

Para proyectos nuevos o únicos, estimar el tiempo para cada actividad puede ser bastante difícil. De hecho, en muchos casos los tiempos de actividad son inciertos y se describen mejor por un rango de valores posibles en lugar de por una estimación de tiempo específica. En estos casos, los tiempos de actividad inciertos se tratan como variables aleatorias con distribuciones de probabilidad asociadas. Como resultado, se proporcionarán declaraciones de probabilidad acerca de la capacidad para cumplir con una fecha específica para completar el proyecto,

Para incorporar tiempos de actividad inciertos en el análisis, necesitamos obtener tres estimaciones de tiempo para cada actividad:

Tiempo optimista (a): el tiempo de actividad mínimo si todo progresa de manera ideal.

Tiempo más probable (m): el tiempo de actividad más probable bajo condiciones normales.

Tiempo pesimista (b): el tiempo de actividad máximo si se encuentran demoras significativas.

Se quiere lanzar al mercado un nuevo producto llamado Porta Vac que consiste en fabricar una aspiradora inalámbrica, por lo que se decidió llevar a cabo un estudio de factibilidad.

Lista de actividades para el proyecto de Porta Vac:

Actividad	Descripción	Predecesora inmediata
A	Elaborar diseño de producto	-
B	Planear investigación de mercados	-
C	Preparar enrutamiento (ingeniería de manufactura)	A
D	Construir modelo prototipo	A
E	Preparar folleto de mercadotecnia	A
F	Preparar estimaciones de costos	C
G	Hacer pruebas preliminares de producto	D
H	Completar encuesta de mercados	B, E
I	Preparar asignación de precio y reporte de pronóstico	H
J	Preparar reporte final	F, G, I

Consideraremos las estimaciones de tiempo optimista, más probable y pesimista para las actividades de Porta Vac. Usando la actividad A como ejemplo, vemos que el tiempo más probable es cinco semanas con un rango de cuatro (optimista) a doce semanas (pesimista). Si pudiera repetirse la actividad muchas veces, ¿cuál es el tiempo promedio para la actividad? Este promedio o tiempo esperado (t) es como sigue:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Para la actividad A tenemos un tiempo esperado o promedio de:

$$T_A = \frac{4 + 4(5) + 12}{6} = 6 \text{ semanas}$$

Con tiempos de actividad inciertos podemos usar la varianza para describir la dispersión o variación en los valores del tiempo de actividad. La varianza del tiempo de actividad está dada por la fórmula:

$$\sigma^2 = \left[\frac{b - a}{6} \right]^2$$

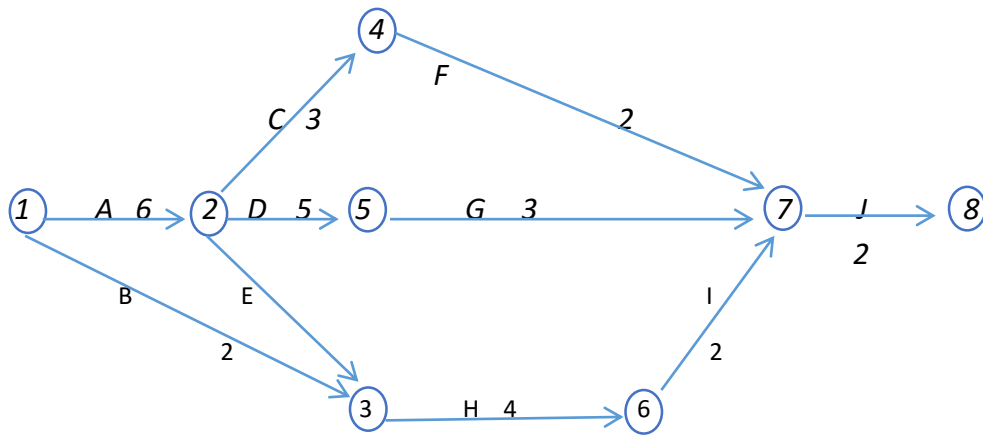
La ecuación de varianza se basa en la noción de que una desviación estándar es aproximadamente 1/6 de la diferencia entre los valores extremos de la distribución:

$(b - a) / 6$. La varianza es el cuadrado de la desviación estándar.

La diferencia entre las estimaciones de tiempo pesimista (b) y optimista (a) afecta en gran medida el valor de la varianza. Las diferencias grandes en estos dos valores reflejan un alto grado de incertidumbre en el tiempo de actividad. Usando la ecuación de la varianza obtenemos la medida de incertidumbre, es decir, la varianza, de la actividad A, que se denota σ^2_A :

$$\sigma^2_A = \left[\frac{12 - 4}{6} \right]^2 = 1.78$$

Las ecuaciones del tiempo esperado y de la varianza se basan en la suposición de que la distribución del tiempo de actividad puede describirse por una distribución de probabilidad beta. Con esta suposición, la distribución de probabilidad del tiempo necesario para completar la actividad A se muestra en la siguiente figura:



Actividad	Actividad Precedente	Tiempo Optimista (a)	Tiempo Más probable (m)	Tiempo Pesimista (b)	Tiempo Esperado	Varianza σ^2
A	/	4	5	12	6	1.78
B	/	1	1.5	5	2	0.44

C	A	2	3	4	3	0.11
D	A	3	4	11	5	1.78
E	A	2	3	4	3	0.11
F	C	1.5	2	2.5	2	0.03
G	D	1.5	3	4.5	3	0.25
H	B, E	2.5	3.5	7.5	4	0.69
I	H	1.5	2	2.5	2	0.03
J	F, G, I	1	2	3	2	0.11

Para el proyecto Porta Vac la ruta crítica es: A – E – H – I – J

Tiempo total esperado de 17 semanas.

Sin embargo, la variación en las actividades críticas puede causar variación en el tiempo necesario para completar el proyecto. Generalmente, la variación en actividades no críticas no tiene efecto en la duración del proyecto debido al tiempo de holgura asociado con estas actividades. Sin embargo, si una actividad no crítica se demora lo suficiente para agotar su holgura, se vuelve parte de una nueva ruta crítica y puede afectar la duración total del proyecto. La variabilidad que conduce a un tiempo total más largo de lo esperado para las actividades críticas siempre extenderá el tiempo total del proyecto y, a la inversa, la variabilidad que resulta en un tiempo total más corto de lo esperado para las actividades críticas reducirá la duración del proyecto, a menos que otras actividades se vuelvan críticas. Ahora usaremos la varianza de las actividades críticas para determinar la varianza de la duración del proyecto.

Sea que T signifique el tiempo total requerido para completar el proyecto. El valor esperado de T, que es la suma de los tiempos esperados para las actividades críticas es:

$$\begin{aligned}\text{Tiempo esperado} &= t_A + t_E + t_H + t_I + t_J \\ &= 6 + 3 + 4 + 2 + 2 = 17 \text{ semanas}\end{aligned}$$

La varianza en el tiempo para completar el proyecto es la suma de las varianzas de las actividades de la ruta crítica. Por tanto, la varianza del tiempo para completar el proyecto es:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma^2_A + \sigma^2_E + \sigma^2_H + \sigma^2_I + \sigma^2_J \\ &= 1.78 + 0.11 + 0.69 + 0.03 + 0.11 = 2.72\end{aligned}$$

La fórmula para la varianza se basa en la suposición de que los tiempos de actividad son independientes.

Si sabemos que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, calculamos la desviación estándar σ para el tiempo para completar el proyecto como:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1.65$$

Suponga que la administración asignó 20 semanas para el proyecto. ¿Cuál es la probabilidad de cumplir con el plazo de 20 semanas?+

Usando la distribución de probabilidad normal, estamos preguntando por la probabilidad de que $T \leq 20$

El valor Z para la distribución de probabilidad normal en $T = 20$ es

$$Z = \frac{20 - 17}{1.65} = 1.82$$

Al usar $Z = 1.82$ y la tabla para la distribución normal encontramos que la probabilidad de que el proyecto cumpla con el plazo de 20 semanas es $0.4656 + 0.5000 = 0.9656$

Que es igual a 96.6 % de probabilidad de terminar el proyecto en 17 semanas o menos⁸.

Problema propuesto:

Una fundidora debe instalar un equipo para controlar la contaminación del aire. Recientemente, el grupo de protección ambiental de la localidad le dio a la fundidora un plazo de 16 semanas para que instale un complejo sistema de filtros de aire en su chimenea principal.

Considere las actividades del proyecto que se enlistan a continuación:

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	ACTIVIDAD PRECEDENTE
A	Construcción de componentes internos	-
B	Modificación de techo y piso	-
C	Construcción de columna de recolección	A
D	Colado de concreto e instalación de estructura	B

⁸ Anderson, D. (2004). "Métodos Cuantitativos para los Negocios". (9ª edición). México: Cengage Learning Editores. p. 524 – 531.

E	Construcción de quemador de alta temperatura	C
F	Instalación de sistema de control	C
G	Instalación de aparato de descontaminación del aire	D, E
H	Inspección y prueba	F,G

Acti- vidad	Actividad prece- den- te	TIEMPO (SEMANAS)				Escriba aquí σ^2
		a	m	b	T	
A	-	1	2	3	2	4/36
B	-	2	3	4	3	4/36
C	A	1	2	3	2	4/36
D	B	2	4	6	4	16/36
E	C	1	4	7	4	36/36
F	C	1	2	9	3	64/36
G	D,E	3	4	11	5	64/36
H	F,G	1	2	3	2	4/36

- Determinar la ruta crítica
- Calcular la probabilidad de que concluya el proyecto en 16 semanas o menos.

|

Problema propuesto:

Acti- vidad	Actividad prece- den- te	TIEMPO (SEMANAS)				Escriba aquí σ^2
		a	m	b	T	
A	-	1	2	3	2	1/9
B	-	2	3	4	3	1/9
C	A	4	5	6	5	1/9
D	B	8	9	10	9	1/9
E	C,D	2	5	8	5	1
F	B	4	5	6	5	1/9
G	E	1	2	3	2	1/9

- Determinar la ruta crítica
- Calcular la probabilidad de que concluya el proyecto en 21 semanas o menos.
- Calcular la probabilidad de que concluya el proyecto en 17 semanas o menos.

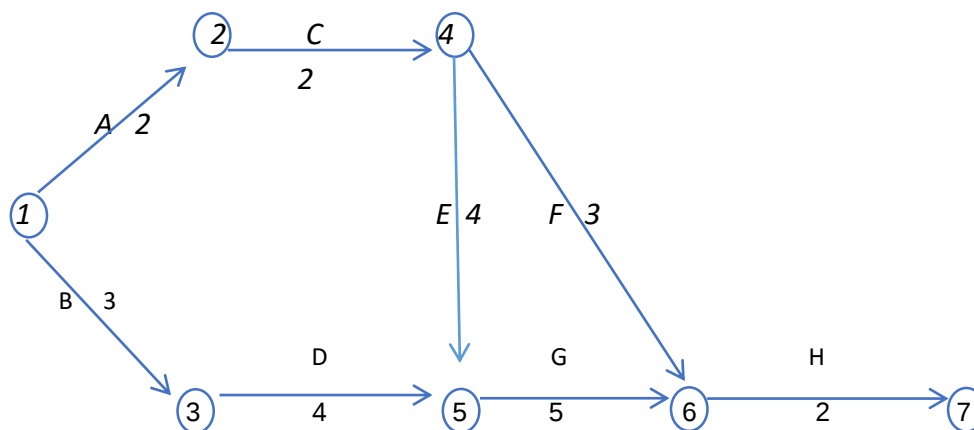
PERT/costo.

PERT/costo le permite a un administrador planear, programar, supervisar y controlar tanto tiempos como costos.

PROBLEMA PROPUESTO:

Activ	Activ precedente	Tiempo Normal (sem)	Tiempo Urgencia (sem)	Costo Normal (\$)	Costo Urgencia (\$)	Costo de Reducción Por semana
A	-	2	1	22,000	23,000	1,000
B	-	3	1	30,000	34,000	2,000
C	A		1	26,000	27,000	1,000
D	B	4	3	48,000	49,000	1,000
E	C	4	2	56,000	58,000	1,000
F	C	3	2	30,000	30,500	500
G	D,E	5	2	80,000	86,000	2,000
H	F,G	2	1	16,000	19,000	3,000
				Σ\$308,000		

- 1.- ¿Cuál es la red de actividades para este proyecto?
- 2.- Identificar la ruta y el tiempo del camino crítico.
- 3.- ¿Cuál es el costo marginal por concluir el proyecto en 13 semanas?
- 4.- La gerencia de la empresa desea terminar en el menor tiempo el proyecto, ¿Cuál es el menor tiempo para concluir el proyecto?, ¿Cuál es en dicha circunstancia, el costo total?



Ruta crítica:

B- C- E- G- H

$2+2+4+5+2=15$ semanas

Costo marginal por concluir el proyecto en 13 semanas: \$3,000

Duración del proyecto	Costo marginal (\$)	Costo total el proyecto (\$)
15 semanas	-	308,000
14 semanas	1,000	309,000
13 semanas	2,000	311,000
12 semanas	2,000	313,000
11 semanas	2,000	315,000
10 semanas	2,000	317,000
9 semanas	3,000	320,000
8 semanas	3,000	323,000
7 semanas	3,000	326,000
	$\Sigma \$18,000$	

9

Formulación del problema de transporte.

El modelo general de problema de transporte se refiere a la distribución de un producto, desde un conjunto de centros de suministro o fuentes, a otro conjunto de centros de recepción o de nodos de destino, de manera que se minimicen los costos totales de transporte.

En general, la fuente i ($i = 1, \dots, m$) tiene capacidad para suministrar s_i unidades y el destino j ($j = 1, 2, \dots, n$) tiene la capacidad de demandar d_j unidades del producto; c_{ij} representa el costo por unidad de llevar productos desde la fuente i al destino j .

Estos problemas se presentan en general mediante una tabla de costos y requerimientos para el problema de transporte:

⁹ Render, B. (2006). *"Métodos Cuantitativos para los Negocios"*. (9ª edición). México: Pearson. p. 546.

		Destino					
		1	2	...	n		
Fuentes	1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	S_1	Suministro
	2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	S_2	
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		
	m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}	S_m	
		d_1	d_2	...	d_n		
		Demanda					

Si Z es el costo de distribución total y la variable x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) es el número de unidades del producto que se deben distribuir desde la fuente i al destino j , la formulación de este problema como problema de programación lineal es:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && c = \sum_{j=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\
 &\text{Sujeta a} && \sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 &&& \sum_{i=1}^m X_{ij} = d_i \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 &&& X_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } i, j.
 \end{aligned}$$

Este modelo tiene soluciones posibles siempre que,

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Este problema es conocido como de transporte estándar; cualquier problema donde la oferta y la demanda no estén balanceadas, debe convertirse en uno estándar antes de resolverlo, agregando fuentes o destinos artificiales.

La regla de la esquina noroeste.

Seleccionar primero x_{11} . Si la última variable fue x_{ij} , seguir con $x_{i,j+1}$ siempre que i tenga recursos disponibles, de otra manera seleccionar $x_{i+1,j}$.

Problema propuesto:

Destino Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Fábrica 1	5	4	3	100
Fábrica 2	8	4	3	300
Fábrica 3	9	7	5	300
Demanda	300	200	200	700

Utilizando el método de la esquina noroeste:

Destino Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	oferta
Fábrica 1	5 100	4	3	100
Fábrica 2	8 - 200	4 + 100	3	300
Fábrica 3	9 +	7 - 100	5 200	300
Demanda	300	200	200	700

Solución Básica Factible Inicial:

$$C_x = 100(\$5) + 200(\$8) + 100 (\$4) + 100 (\$7) + 200 (\$5) = \$4,200$$

Esta solución es factible puesto que todas las restricciones de oferta y demanda se satisfacen. También fue muy rápida y fácil de alcanzar. Sin embargo, tendríamos mucha suerte si esta solución señalará el costo de transporte óptimo del problema, porque este método ignora por completo los costos de envío por cada una de las rutas.

Esta solución inicial debe ser evaluada para ver si es óptima. Se calcula un índice de mejora por cada celda vacía con el método de salto de piedra en piedra. Si estos procedimientos indican que es posible una mejor solución, se utiliza el trayecto de salto de piedra en piedra para ir de esta solución a soluciones mejoradas hasta que se encuentra una que sea óptima.

El método de salto de piedra en piedra es una técnica iterativa para pasar de una solución factible inicial a una factible óptima. Para aplicar este método, primero se debe observar una regla sobre el número de rutas de envío utilizadas. **El número de rutas ocupadas (o cuadros) siempre debe ser igual a la suma del número de filas más el número de columnas menos uno.**

Rutas de envío ocupadas (cuadros) = número de filas + número de columnas – 1

En este ejemplo la solución inicial debe tener: $3 + 3 - 1 = 5$ rutas ocupadas.

Cuando el número de rutas ocupadas es menor que éste, la solución se llama **degenerada** y no se puede utilizar el método de salto de piedra en piedra.

¿Qué les sucedería a los costos de envío si una unidad del producto, tentativamente fuera enviado por una ruta no utilizada?

Análisis del efecto del ingreso de las variables no básicas:

$X_{12} = +4 - 4 + 8 - 5 = +3$ (no deseable)

$X_{13} =$ No se puede ingresar.

$X_{23} = +3 - 5 + 7 - 4 = +1$ (no deseable)

$X_{31} = +9 - 8 + 4 - 7 = -2$ (deseable)

Hemos identificado una variable no-básica (X_{31}) que al volverse básica tiene el efecto neto de disminuir el costo total en \$2 por cada unidad remitida por esa ruta. La asignación debe considerar las restricciones, así tendríamos la siguiente tabla:

Destino Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Fábrica 1	5 100	4	3	100
Fábrica 2	8 100 -	4 200	3 +	300
Fábrica 3	9 100 +	7	5 200 -	300
Demanda				700

	300	200	200	700
--	-----	-----	-----	-----

Como era de esperar, el costo total del transporte se redujo en \$200 (\$4,200-\$200 = \$4,000).

$$C x = 100(\$5) + 100(\$8) + 200(\$4) + 100 (\$9) + 200 (\$5) = \$4,000$$

Evaluemos ahora la posibilidad de otro intercambio entre las variables no-básicas:

Análisis del efecto del ingreso de las variables no básicas:

$$X_{12} = +4 - 4 + 8 - 5 = +3 \text{ (no deseable)}$$

$$X_{13} = +3 - 5 + 9 - 5 = +2 \text{ (no deseable)}$$

$$X_{23} = +3 - 5 + 9 - 8 = -1 \text{ (deseable)}$$

$$X_{32} = +7 - 4 + 8 - 9 = +2 \text{ (no deseable)}$$

Hemos identificado una variable no-básica (X_{23}) que al volverse básica tiene el efecto neto de disminuir el costo total en \$1 por cada unidad remitida por esa ruta. La asignación debe considerar las restricciones, así tendríamos la siguiente tabla:

Destino Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Fábrica 1	5 100	4	3	100
Fábrica 2	8	4 200	3 100	300
Fábrica 3	9 200	7	5	300
Demanda	300	200	200	700

El costo total del transporte se redujo en \$100 (\$4,000-\$100 = \$3,900).

Solución óptima:

$$C x = 100(\$5) + 200(\$4) + 100 (\$3) + 200 (\$9) + 100(\$5) = \$3,900$$

Evaluemos ahora la posibilidad de otro intercambio entre las variables no-básicas:

Análisis del efecto del ingreso de las variables no básicas:

X_{12} = No se puede ingresar.

X_{13} = $+3-5+9-5$ = $+2$ (no deseable)

X_{21} = $+8-9+5-3$ = $+1$ (no deseable)

X_{32} = $+7-5+3-4$ = $+1$ (no deseable)

Esta es la solución óptima dado que al realizar el análisis del ingreso de las variables no básicas ninguna reduce el costo de transporte.

Problema propuesto:

Encontrar la **Solución Básica Factible Inicial (SBFI)** del siguiente problema por el método de la esquina noroeste:

		Destino				Oferta
		Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Mercado 4	
Origen	Fábrica1	\$4	\$1	\$2	\$6	100
	Fábrica2	\$6	\$4	\$3	\$5	80
	Fábrica3	\$5	\$2	\$6	\$4	70
Demanda		40	50	70	90	250

Respuesta:

Al aplicar el método de la esquina noroeste al ejemplo se obtiene la tabla siguiente, donde se llena el primer casillero correspondiente a x_{11} con el máximo valor posible, en este caso 40 por restricción en la demanda, se continúa con x_{12} pues hay oferta disponible hasta llenar todos los casilleros sin sobrepasar las restricciones.

Aplicación del método de la esquina noroeste:

		Destino				Oferta
		1	2	3	4	
Origen	1	4 40	1 50	2 10	6	100
	2	6	4	3 60	5 20	80
	3	5	2	6	4 70	70
Demanda		40	50	70	90	

Solución básica factible inicial:

$$x_{11} = 40, x_{12} = 50, x_{13} = 10, x_{23} = 60, x_{24} = 20, x_{34} = 70.$$

$$\text{Costo inicial} = 40 \times 4 + 1 \times 50 + 2 \times 10 + 3 \times 60 + 5 \times 20 + 4 \times 70 = \$790$$

El método de búsqueda de costo mínimo

Este es un procedimiento que aventaja a la regla de la esquina noroeste en la búsqueda de la solución óptima. Aquí emplearemos la misma técnica básica de agotar alternativamente ya sea la oferta de las fábricas o la demanda de los mercados, pero modifica el requisito de proceder geográficamente desde la esquina superior izquierda, en lugar de lo anterior, la asignación corresponde a la casilla de menor costo de la tabla de transporte. Si esta asignación satisface el requisito de demanda de un mercado, se sigue adelante con el costo más bajo siguiente en el mismo renglón y agotando, de ser posible, las existencias de las fábricas en cuestión.

El procedimiento agota de la misma manera la oferta de las fábricas y la demanda de los mercados. Inspeccionando siempre los costos a fin de encontrar la casilla siguiente para una asignación en el renglón o la columna de que se trata.

Problema propuesto:

Destino \ Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Fábrica 1	5	4	3	100
Fábrica 2	8	4	3	300
Fábrica 3	9	7	5	300
Demanda	300	200	200	700

Utilizando el método del costo mínimo:

Destino \ Origen	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Fábrica 1	5	4	3	100



			100	
Fábrica 2	8	4	3	300
		200	100	
Fábrica 3	9	7	5	300
	300			
Demanda	300	200	200	700

Solución Básica Factible Inicial:

$$CX = 100(\$3) + 200 (\$4) + 100 (\$3) + 300 (\$9) = \$4,100$$

Esta solución inicial debe ser evaluada para ver si es óptima. Se calcula un índice de mejora por cada celda vacía con el método de salto de piedra en piedra.

Para aplicar este método, primero se debe observar una regla sobre el número de rutas de envío utilizadas.

Rutas de envío ocupadas (cuadros) = número de filas + número de columnas – 1

En este ejemplo la solución inicial debe tener: $3 + 3 - 1 = 5$ rutas ocupadas.

Por el método de costo mínimo obtenemos = 4 rutas ocupadas, como el número de rutas ocupadas es menor que 5, la solución se llama **degenerada** y, por lo tanto, no es posible utilizar el método de salto de piedra en piedra.

En este caso el método del costo mínimo no nos lleva a la solución óptima, sin embargo, tiene un mejor rendimiento en cuanto a resultados respecto al Método de la Esquina Noroeste.

El método de Vogel o de sanción.

1.- Por cada fila y columna, calcúlese su diferencia, definida como la resta entre el costo unitario y el más cercano al menor (c_{ij}) que aún quede en esta fila o columna.

2.- Determinar el renglón o la columna con la diferencia de costos mínimos más grande, si hay dos o más iguales, seleccionar arbitrariamente.

3.- Asignar tanto como sea posible a la celda que tiene el costo más pequeño tratando de satisfacer la demanda en función de la disponibilidad de la oferta e ir disminuyendo la oferta y la demanda correspondiente.

4.- Eliminar las columnas o los renglones saturados.

5.- Regresar al primer paso y repetir hasta que columnas y renglones queden saturados; si al final sólo queda un renglón o una columna, por el método de costo mínimo continuamos asignando a las celdas restantes hasta que todas queden saturadas.

Ejemplo:

Supóngase que se tienen tres fábricas distintas que pueden embarcar el producto a tres diferentes mercados de menudeo, como se muestra en la figura. La capacidad semanal en términos de unidades productivas varía entre las fábricas, así como la demanda semanal que requiere cada mercado de menudeo.

Sin embargo, los costos de embarque dependen de qué fábricas embarcan a qué mercados ya que varían las distancias de embarque.

Tabla de transporte:

Mercado Fábrica	1.- Kansas City	2.- Atlanta	3.- Detroit	Oferta	Sanciones en renglones	
1.- Chicago	3 20 +	2 -	3 30 -	50	1	1
2.- Nueva York	10 10 -	5 60 +	8 +	70	3	5
3.- Dallas	1 20	3 	10 	20	2	
Demandas	50	60	30	140		

Sanciones en 2 1 5
Columnas 2 1

La solución básica factible inicial por el método voguel es:

$$CX = 20(\$3) + 30(\$3) + 10(\$10) + 60(\$5) + 20(\$1) = \$570$$

Esta solución inicial debe ser evaluada para ver si es óptima.

Rutas de envío ocupadas (cuadros) = número de filas + número de columnas – 1

En este ejemplo la solución inicial debe tener: $3 + 3 - 1 = 5$ rutas ocupadas.

Como si cumple la condición se realiza el **análisis de ingreso de las variables no básicas** por el método de salto de piedra:

Efecto del ingreso de $X_{12} = +2 - 5 + 10 - 3 = +4$ (no deseable)

Efecto del ingreso de $X_{23} = +8 - 3 + 3 - 10 = -2$ (deseable)

Efecto del ingreso de $X_{32} = +3 - 5 + 10 - 1 = +7$ (no deseable)

Efecto del ingreso de $X_{33} = +10 - 3 + 3 - 1 = +9$

Por lo tanto, conviene ingresar la variable X_{23} , ya que cada unidad que se logre ingresar, mejorará el costo de transporte en \$2 por unidad.

En una sola iteración se consigue llegar a la solución óptima; después de haber intercambiado 10 unidades, que es la cantidad máxima que se puede intercambiar, representando un ahorro de 10 unidades $\times$ \$2 c/u = \$20

Mercado Fábrica	1.- Kansas City	2.- Atlanta	3.- Detroit	Oferta
1.- Chicago	3 30	2	3 20	50
2.- Nueva York	10	5 60	8 10	70
3.- Dallas	1 20	3	10	20
Demandas	50 0	60	30	140

Solución óptima:

$$CX = 30(\$3) + 20(\$3) + 60(\$5) + 10(\$8) + 20(\$1) = \$550$$

La red: Obsérvese ahora cómo se puede modelar este mismo problema como una red.

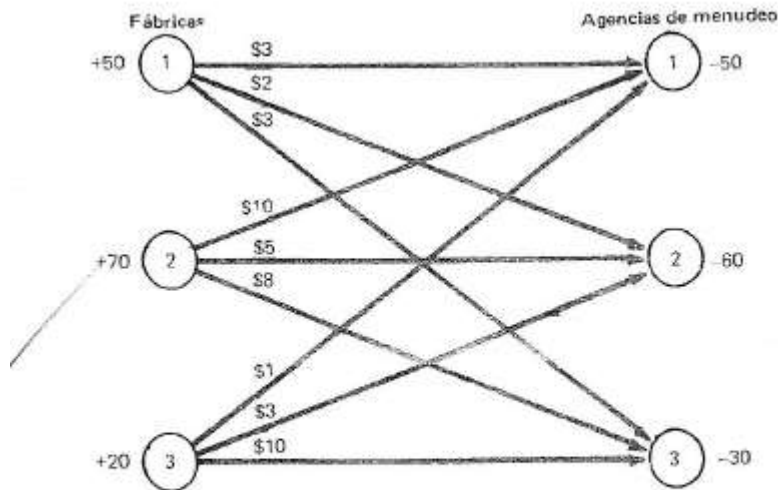


Figura 2. Formulación en red del problema de transporte

Abastecimiento y demanda desiguales:

Supóngase que las ofertas en las fábricas de este ejemplo hubieran sido 60, 80 y 30 respectivamente. Entonces la oferta serían 30 más que la demanda total de 140 unidades.

Para ajustar la oferta y la demanda se puede definir un mercado "artificial" con una demanda igual a la diferencia entre las existencias totales y la demanda total. Esto es, con una demanda de 30 unidades.

El costo de embarcar desde cada fábrica a este mercado "artificial" será cero¹⁰.

	Kanssas City	Atlanta	Detroit	Artificial	Oferta
Chicago	3	2	3	0	80
New York	10	5	8	0	80
Dallas	1	3	10	0	30
Demanda	50	60	30	30	170 170

¹⁰ Buffa, E. (1994). "Ciencias de la Administración e Investigación de Operaciones" México: Limusa. p.568 – 580.